Årg. 35:2 Juni 1952

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ANDRA HÄFTET

Karin Aurivillius, Analysvågen I 81
B. Hallert, Fotogrammetri I 93
Eve Staffansson, Fältelektronmikroskopet 101
Erik Tegeman, Metallers värmeledningsförmåga 118
Lösningar till uppg. 1 och 6 i specialkurs, mars 1952 118
Bokanmälningar: Thébault, Les récréations mathématiques; Hoheisel, Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen; Gask, Ordinära differentialekvationer; Hylleraas, Matematisk og teoretisk fysikk II; Levy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle; Roy, Mécanique des milieux continus et déformables; Phase Transformations in Solids (Symposium); London, Superfluids; Bennett-Jupnik-Osterberg-Richards, Phase Microscopy; Frauenfelder-Huber, Einführung in die Physik I; Reports on Progress in Physics; Rocard, Electricité; Wilson, A Hundred Years of Physics; Bernal, The Physical Basis of Life; Wilson, The Microphysical World; Lindstad, Veiledning i skoleforsøk i mekanikk og elektricitetslære; Hoyle, Världsalltets byggnad; Serien Kunskap och liv; Brandstätter-Sternhagen, Chemische Schulversuche; Baud, Traité chimie industrielle; Mittasch, Geschichte der Ammoniaksynthese; Lötzberger, Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen; Lundberg, Matematiska tabeller 119
Recensenter i detta häfte 138
Gradualavhandlingar (autoreferat): H. Rådström, Convexity and Norm in Topological Groups; S. Ahrland, On the Complex Chemistry of the Uranyl Ion 138
Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. Bågman) 141
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentexamen mars 1952 145
Realexamen v.t. 1952: Provräkning 151
Praktisk realexamen v.t. 1952: Uppgifter i fysik och Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära 152
Insänd litteratur 155
Tidskrifter, innehållsöversikt 156
Annonsörer: R. Grave; Lindståhls Bokhandel; Natur & Kultur; Norstedt & Söner (två annonssidor); Philips; Sjöbergs förlag; Svenska Bokförlaget.

Pris pr år kr. 12:50 pr häfte kr. 3:50

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Subskription enklast genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 12:50, pr häfte kr. 3:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Pärmar av grön klot à 2:50; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 äro flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14—30 tills vidare kr. 8:—, för 31—34 kr. 10:—.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor Torsten Jönsson, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 0:80.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 1:60
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1:40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1:40.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 1:40.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.

Problemhäften för åren 1943—50 à kr. 1:—, för 1951 à kr. 1:20. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.
I *porto* tillkommer 15 öre pr särtryck.

Pärm till årg. 33—34 à 2:50 (+ 20 öre). Rekvireras genom inbet. å giro.

Allmänt omvittnat är att en avsevärd del av innehållet i Elementa — icke minst i äldre årg. — är av bestående värde. En Elementaserie är därför en beaktansvärd tillgång. En komplett dylik är svår att uppbringa, men ännu finnas alla årg. fr. o. m. årg. 14. Lagret tunnas emellertid ut med varje år som går. Försumma därför ej att nu skaffa Er en så fullständig samling som möjligt. Priser se ovan.

Vid pågående inventering

av svenska biblioteks innehav av Elementa-årgångar har det bekräftats — vad man så väl vet förut — att enda sättet att bevara tidskrifter är att binda dem. Det är nu mycket dyrare att göra det än förr, men gör det likafullt, ty att fylla uppkomna luckor blir kostsamt, om det överhuvud lyckas.

Pärmar finnas (se ovan), men rådgör med Er bokbindare. Det kanske blir endast obetydligt dyrare att binda i eget band, vilket ju har den fördelen att den personliga smaken då bättre kan tillgodoses. För övrigt är Elementas lager av pärmar ej stort.

Bilagor: Lindståhls Bokhandel, Sjöbergs förlag.

Nu är andra delen här
av standardverket i matematik

Prof. J. Malmquist — fil. lic. V. Stenström —
fil. lic. S. Danielson

MATEMATISK ANALYS

DEL II

Analytiska funktioner och lineära differentialekvationer i det komplexa området

Fackmannen om Del I, Differential- och integralkalkyl:

»Utgivandet av en så omfattande lärobok på svenska är uppenbarligen en händelse av allra största betydelse för den matematiska undervisningen i Sverige. — Genom den konkreta och klara framställningen, de många exemplen och figurerna och det rika innehållet måste boken komma att bli av stort värde för de matematikstuderande vid högskolor och universitet. — Författarna äro att gratulera till det lyckliga resultatet av det omfattande arbete de måste ha nedlagt på att skriva denna lärobok.»

Fil. dr *Hans Rådström* i Elementa

Del III: Variationskalkyl, Fourierska serier och partiella differentialekvationer. *Utkommer i höst.*

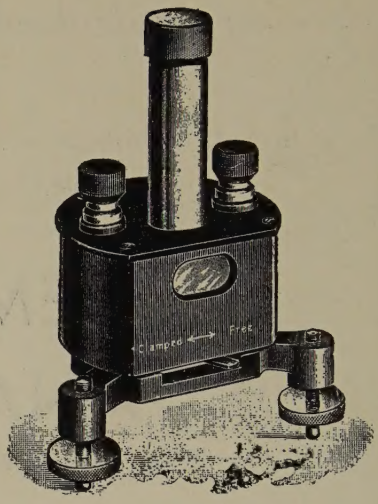
Komplett i tre delar. Del I inb. 70:—, del II 72:—, del III 74:—.

En bok från NATUR och KULTUR är en god bok

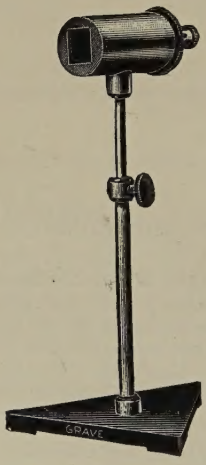
Utställning och Lager

av all slags
materiel för

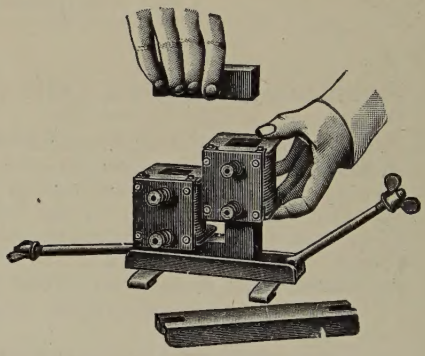
Fysikunder-visningen



Spegelgalvanometer med
vridspolesystem



Termostapel
enl. Holjer Witt



Söndertagbar transformator

RUDOLPH GRAVE A/B
STOCKHOLM 3

Analysvågen I

Av assistent Karin Aurivillius, Stockholm[1]

Innehåll:

1. Konstruktion
2. Avläsning
3. Vågekvation
4. Känslighet
5. Svängningskonstant
6. Osäkerhet
7. Olikarmighet
8. Olika vägningsmetoder
   a. Proportionalvägning
   b. Gauss' metod
   c. Bordas metod
9. Kalibrering av vikter
10. Luftens upptryck
11. Praktiskt utförande
12. Allmänna iakttagelser

Vågen är ett instrument för bestämmandet av en kropps massa (vikt) ur dess tyngd.

Massan är ett mått på materieinnehållet, och tyngden är den kraft, med vilken massan drages mot jorden.

1. Vågens konstruktion

Analysvågens huvudbeståndsdel är en tvåarmad hävstång, *vågbalken* eller *balansen*. Denna är i sin mitt försedd med en slipad egg av agat, *mitteggen*, och i ändarna med eggar av samma slag, *sidoeggarna*, på så lika avstånd som möjligt från mitteggen. På sidoeggarna äro *vågskålarna* upphängda. För avläsning av vågbalkens lutning är den framför mitteggen försedd med en visare, *vågtungan*, vars spets löper över en skala. Stundom är vågtungans spets fast förbunden med en skala, och en bild av denna skala projiceras på en mattskiva, försedd med ett mittstreck. Då vågen (= vågbalken med vågskålar och vågtunga) svänger fritt, vilar

[1] Uppsatsen har tillkommit för att tjäna som handledning vid kemiundervisningen vid Stockholms Högskola. Det befanns nödvändigt att utarbeta en dylik, då någon på samma gång kortfattad och tillräckligt fyllig framställning av teorien för analysvågen och anvisningar för dess användning ej finns på svenska. Då behov av en sådan handledning föreligger på många håll, vid undervisning, forskning och praktiskt kemiskt arbete, har författarinnan haft vänligheten ställa sitt arbete till förfogande för denna vidare krets genom att publicera det i Elementa. Red.

mitteggen på en *panna*, en plan yta av agat eller stål. Upphängningsoken för vågskålarna ha motsvarande pannor. Skärningslinjerna mellan eggarna och pannorna bilda *axlarna*: *mittaxeln* (*vridaxeln*) och *sidoaxlarna*. Upphängningsoken äro icke fast förenade med skålarna utan förbundna med dessa medelst *korsaxlar*, som äro vinkelräta mot sidoaxlarna, samt enklare *mellanaxlar*, som äro parallella med de sistnämnda.

För att eggarna och pannorna skola skyddas mot åverkan, *arreteras* vågen, dvs. vågbalken lyftes genom särskilda anordningar, så att mitteggen ej vilar mot pannan, varefter vågskålarnas upphängningsok lyftas från sidoeggarna och vågskålarna stödas under. Då last och vikter påläggas och avtagas, skall vågen *alltid vara arreterad*, likaså då den ej användes. Då vågen skall användas, *desarreteras* den försiktigt, så att den kan svänga fritt. Därvid genomföras ovanstående operationer i omvänd ordning.

Det föremål som skall vägas placeras på en av vågskålarna. Massan av föremålet och vågskålen ger under tyngdkraftens inverkan ett vridmoment åt den hävstångsarm, på vilken skålen är upphängd. På andra vågskålen anbringas en *standardmassa, vikt*, som tillsammans med vågskålens massa ger vågarmen ett vridmoment, som motverkar det som åstadkommes av föremålet som skall vägas och dess vågskål. Därvid kan man förfara så, att man antingen håller hävstångsarmens längd konstant och varierar vikterna, till dess jämvikt inträder, eller att man håller vikten konstant och ändrar hävstångsarmens längd. Det finns även vågar, där man bestämmer vridmomentets storlek genom att mäta vågbalkens *utslagsvinkel*, dvs. vinkeln som under tyngdens påverkan bildas mellan planet genom sidoaxlarna och horisontalplanet.

Vid användandet av analysvågen komma alla tre metoderna samtidigt till användning, nämligen variation av vikterna på vågskålen, variation av hävstångsarmens längd för *ryttaren* (en vikt på vanligen 10 mg, som placeras ovanpå den graderade balken) samt avläsning av utslagsvinkeln.

På en del analysvågar finns ingen ryttare, utan en från vågbalkens ända nedhängande kedja användes för små viktändringar. Andra änden av kedjan kan rullas upp på en vals. Kedjan belastar vågbalken i lodrät riktning med massan av kedjelängden från upphängningspunkten till dess nedersta punkt. Denna vikt avläses på den ratt varmed valsen vrides.

På vågbalken finnes en vågrät och en lodrät skruv längs vilka små muttrar kunna förflyttas. De nyttjas för att vid behov förskjuta vågbalkens tyngdpunkt.

Många vågar äro försedda med *dämpningsanordningar*. En konstruktion har, hängande i vågskålarnas upphängningsok, upptill slutna cylindrar, som äro rörliga i koncentriskt omgivande nedtill slutna cylindrar, fast förbundna med vågens stativ. Vågens rörelse bromsas då upp genom »*luftdämpning*». En annan konstruktion har på vågbalken en aluminiumskiva, som löper i fältet från en permanent hästskomagnet. Svängningarna avtaga då genom *virvelströmsdämpning*. Då magnetens obetydliga yttre fält har horisontell riktning över vågskålarna, är anordningen icke fullt så riskabel vid vägning av järnföremål, som man först skulle tro; man bör dock iaktta försiktighet.

En del vågar ha anordningar för automatisk påläggning av vikterna, som manövreras med rattar. Man behöver då ej öppna vågskåpet för att lägga på vikterna.

2. Vågens avläsning

Då en våg desarreterats, brukar den komma i dämpad svängning. Den tid som åtgår tills vågen uppnår sitt jämviktsläge beror på den reaktionskraft den erfar vid sin rörelse. Härunder skall *vågskåpet vara stängt*, så att luftströmningar ej störa.

En s. k. »*odämpad*» analysvåg, där den förefintliga dämpningen huvudsakligen beror på vågskålarnas friktion mot luften och friktionen i de olika axlarna, svänger förhållandevis länge innan den stannar. Detta omöjliggör en direkt observation av jämviktsläget inom rimlig tid. I stället observerar man för en följd av svängningar de ställen på skalan, där vågtungan vänder. Dessa punkter kallas *vändpunkterna* och deras avstånd från jämviktsläget kallas *svängningsamplituderna*.

Vore en våg *helt odämpad*, skulle man finna jämviktsläget genom att observera *en* vändpunkt på den högra sidan (s_h) och *en* på den vänstra (s_v). Jämviktsläget (s) skulle då ligga mitt emellan dessa båda vändpunkter:

$$s = \frac{s_h + s_v}{2} \qquad (1)$$

En tämligen starkt dämpad vågs svängningar åskådliggöres i fig. 1. På grund av dämpningen störes symmetrin i svängningarna, och om endast två vändpunkter observeras, erhålles ett s-värde, som antingen är för stort eller för litet. För att göra sig oberoende av dämpningens inflytande på jämviktsläget måste man observera ett *udda* antal på varandra följande vändpunkter. Om man då bildar medelvärdet av skalavläsningarna åt ena hållet och medel-

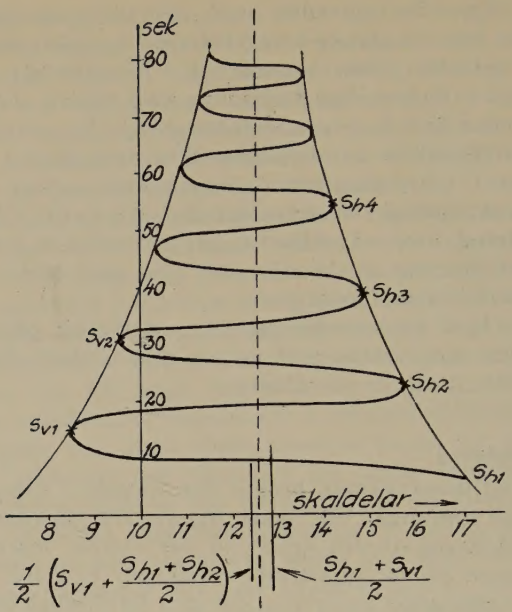


Fig. 1. Svängningar hos en analysvåg utan särskild dämpningsinrättning.

värdet av skalavläsningarna åt andra hållet samt i sin tur medelvärdet av dessa medelvärden, finner man ett värde, som mycket nära ansluter sig till det riktiga jämviktslägets plats på skalan. Om $\bar{s}_h$ betecknar medelvärdet av ett *jämnt* antal på varandra följande vändpunkter på höger sida och $\bar{s}_v$ medelvärdet av ett *udda* antal på vänstra sidan, gäller

$$s=\frac{\bar{s}_h+\bar{s}_v}{2} \qquad (2)$$

Ett jämviktsläge kan angivas i *enkelutslag* eller i *dubbelutslag*. Med enkelutslag menas skalavläsningen för jämviktslägets plats på skalan beräknat enligt ekv. (2) och med dubbelutslag menas, som framgår av namnet, dubbla värdet; alltså $2\ s=\bar{s}_h+\bar{s}_v$.

Vågar med dämpningsinrättningar möjliggöra en direkt avläsning av vågens jämviktsläge. Svängningen avstannar då snabbt, och efter att ha passerat jämviktsläget två gånger komma vanligen dessa vågar till vila. En dämpningsvåg är mindre noggrann än samma våg med avmonterad dämpningsinrättning. Orsaken är bland annat den, att jämviktsläget aldrig fullt uppnås. Vågen stan-

nar på ett litet avstånd från det rätta jämviktsläget, och detta avstånd varierar från gång till gång. Genom att undersöka jämviktslägets variationer får man en uppfattning om vägningens osäkerhet (§ 6). En »dämpad» analysvåg behöver omkring 15 sekunder för att komma till vila. Därefter åtgå några sekunder, för att man med säkerhet skall kunna konstatera, att vågen stannat. Avläsningstiden är därför densamma som hos en god svängande analysvåg. Bekvämligheten i avläsningen är emellertid betydligt större hos en »dämpad» våg än hos en »odämpad», och man spar tiden och arbetet för uträkningen av jämviktsläget.

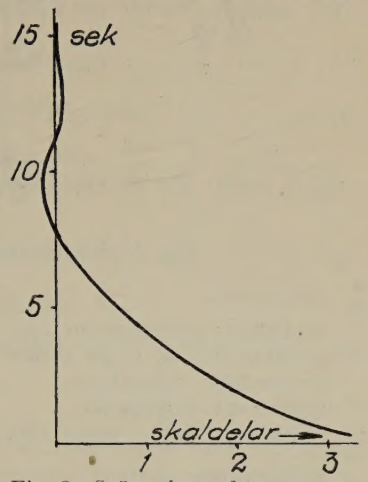


Fig. 2. Svängningar hos en analysvåg med dämpningsinrättning.

Fig. 2 åskådliggör hur amplituden vid ett försök med en dämpningsvåg avtog med tiden.

Angående skalorna är att märka att en del fabrikanter ej alls sätta några siffror på skaldelarna, medan andra förlägga skalans nollpunkt till dess mittersta skalstreck. Skalutslagen på höger sida om nollpunkten bruka i senare fallet betecknas +, till vänster −. Vid avläsning av utslagen hos vågar, på vars skalor inga siffror äro utsatta, är det praktiskt att kalla skalans mittpunkt 10 och dess ändpunkter, beroende på graderingen, 5 och 15 eller 0 och 20. Vid beräkning av jämviktsläget behöver man då ej taga hänsyn till skalavläsningarnas tecken.

Om den obelastade vågen av någon anledning ej har sitt jämviktsläge i närheten av skalans mittpunkt, avhjälper man detta genom att vrida muttern på vågbalkens horisontella skruv, men det finnes ingen anledning till någon *exakt* injustering, då jämviktsläget ej brukar hålla sig alldeles konstant. På dämpade vågar med automatisk viktpåläggning brukar man avläsa milligramvikterna från utslaget, och då måste man kontrollera att den obelastade vågen har sitt jämviktsläge i skalans nollpunkt.

3. Vågekvationen

Vågbalkens upphängningsaxel (mittaxeln) samt de båda sidoaxlarna, en i var ände av balken, vilka uppbära vågskålarna, förut-

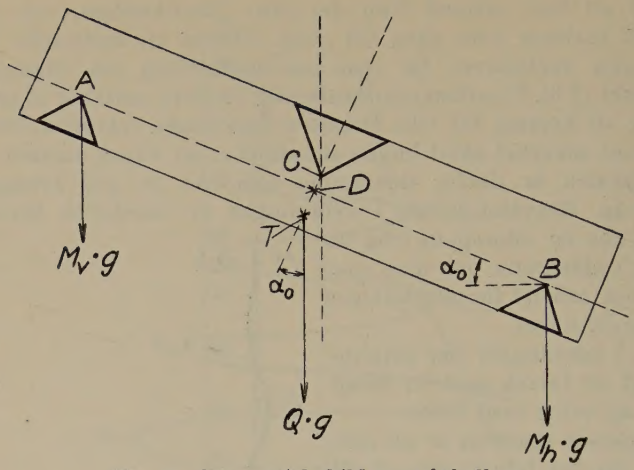


Fig. 3. Schematisk bild av vågbalken.

A, B sidoaxlarna
C vågbalkens mittaxel (vridaxeln)
D projektionen av C på planet genom båda sidoaxlarna
T vågbalkens tyngdpunkt
Q vågbalkens (inkl. visare) vikt
M_v, M_h vågskålarnas massor
W föremålets massa
P vikternas massa
ΔP liten ändring av viktmassan
J vågbalkens tröghetsmoment
g tyngdaccelerationen
l_v, l_h vågarmarnas längder AD och BD
d avståndet CT mellan vågbalkens mittaxel och vågbalkens tyngdpunkt
a avståndet CD från vågbalkens mittaxel till planet genom båda sidoaxlarna (vertikalavståndet mellan eggarna)
α utslagsvinkel, vinkeln mellan planet genom båda sidoaxlarna och horisontalplanet
α_{01}, α_{02} utslagsvinklar vid belastningen 0 vid två olika vägningstillfällen
α_1, α_2 utslagsvinklar för belastad våg vid två olika vägningstillfällen
s, s_{01}, s_{02}, s_1 och s_2 motsvarande skalavläsningar
l_t vågtungans längd uttryckt i skaldelar

sättas vara horisontella och inbördes parallella. Alla rörelser betraktas i ett vertikalplan, vinkelrätt mot mittaxeln.

För en god analysvåg äro d och a i det närmaste oberoende av belastningen men variera dock något på grund av *vågbalkens böjning*. Båda storheterna räknas positiva nedåt från mittaxeln. Avståndet d måste vara >0, för att vågen skall kunna befinna sig i jämvikt. Det brukar vara av storleksordningen 0,1 mm och regleras genom att man vrider muttern på vågbalkens vertikala skruv. Avståndet a kan vara $\lessgtr 0$ och plägar utgöra någon 0,01 mm; l_v och

l_h kunna av olika orsaker variera, vilket kan medföra väsentliga fel i vägningen. De räknas från skärningspunkten mellan sidoaxeln och ett vertikalplan genom korsaxeln, om den förra icke skulle vara exakt parallell med mittaxeln.

Villkoret för jämvikt för den obelastade vågen är:

$$M_v g(l_v \cos \alpha_0 + a \sin \alpha_0) + Qgd \sin \alpha_0 = M_h g(l_h \cos \alpha_0 - a \sin \alpha_0) \quad (3)$$

Då g har samma värde vid båda vågskålarna vid alla vanliga vägningar, faller denna storhet bort.

Ekv. (3) kan förenklas till följande form:

$$M_v(l_v + a\alpha_0) + Qd\alpha_0 = M_h(l_h - a\alpha_0) \quad (4)$$

eftersom vinkeln α_0 är liten, så att $\operatorname{tg} \alpha_0 \approx \alpha_0$.

Om vågen belastas med föremålet (taran) W och vikten P, får man på samma sätt:

$$(M_v + W)(l_v + a\alpha_1) + Qd\alpha_1 = (M_h + P)(l_h - a\alpha_1) \quad (5)$$

Genom subtraktion erhålles ur (4) och (5):

$$W(l_v + a\alpha_1) + [(M_v + M_h)a + Qd](\alpha_1 - \alpha_{01}) = P(l_h - a\alpha_1) \quad (6)$$

4. Vågens känslighet

definieras som kvoten mellan utslagsändringen och viktsändringen på ena vågskålen. Känsligheten kan också definieras som ändringen i utslag, då de pålagda vikterna ändras med 1 mg. Det är nödvändigt att känna till känslighetens beroende av belastningen för ett riktigt utförande av vägningarna.

Om viktmassan ändras med ΔP, får man

$$W(l_v + a\alpha_2) + [(M_v + M_h)a + Qd](\alpha_2 - \alpha_{02}) = (P + \Delta P)(l_h - a\alpha_2) \quad (7)$$

Observera att utslagsvinklarna α_{01} och α_{02} måste vara lika inom gränserna för vågens osäkerhet (§ 6), annars måste vägningen förkastas. Ur ekv. (6) och ekv. (7) erhålles genom subtraktion:

$$[(W + P + M_v + M_h)a + Qd](\alpha_2 - \alpha_1) = \Delta P(l_h - a\alpha_2) \quad (8)$$

Nu är $M_v \approx M_h$ och ersättes med M, vidare $W \approx P$ och $a\alpha_2 \ll l_h$. Man får då

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\Delta P} = \frac{l_h}{2(P + M)a + Qd} \quad (9)$$

En liten masskillnad kan alltså bestämmas med hjälp av observationer av de olika vinklar vågbalken vid de olika vägningarna

bildar med horisontalplanet. Därvid spelar vågtungan över skalan. Insättes nu $\alpha_2-\alpha_1=(s_2-s_1)/l_t$ i ekv. (9), får man vågens känslighet K:

$$K=\frac{s_2-s_1}{\Delta P}=\frac{l_h l_t}{2(P+M)a+Qd} \text{ skaldelar/mg} \qquad (10)$$

Denna ekv. ger upplysning om hur en analysvåg bör vara konstruerad.

Det kan förefalla lämpligt att göra vågarmen l så lång som möjligt för att få stor känslighet. En lång vågbalk blir dock utsatt för större nedböjning genom belastningen, om den inte samtidigt konstrueras mycket kraftig, i vilket fall Q ökar, varigenom vinsten i känslighet delvis går förlorad. Ännu värre är att om Q och l ökar, medför detta ökat tröghetsmoment, vilket orsakar att vågens svängningstid blir lång (ekv. 11). Man väljer därför att hålla vågbalken kort och att försöka uppnå hög känslighet genom lämplig storlek på övriga i ekv. (10) ingående storheter.

Om mittaxeln och sidoaxlarna ligga i samma plan, blir avståndet $a=0$, och känsligheten blir oberoende av belastningen. Om mittaxeln ligger ovanför planet genom båda sidoaxlarna, blir avståndet $a>0$, och känsligheten kommer att minska med ökad belastning. Om mittaxeln ligger under planet genom båda sidoaxlarna, blir avståndet $a<0$, och känsligheten ökar med belastningen. Kurvor, som ange sambandet mellan K och P för de olika fallen: $a=0$, $a>0$ och $a<0$ äro givna i fig. 4. Avståndet a varierar emellertid något med belastningen, då vågbalkens armar ej äro absolut styva. Kurvorna, som ange känsligheten som en funktion av belastningen, kunna därför hos sämre vågar få förlopp, som visas i fig. 5.

Produkten Qd skall vara så liten som möjligt, dvs. vågbalken skall vara lätt, och tyngdpunktens avstånd från mittaxeln inte alltför stort. Avståndet d får dock ej medelst regleringsmuttern injusteras så, att nämnaren i ekv. (10) blir alltför liten, då detta skulle medföra lång svängningstid för vågen, se nedan (ekv. 11). En alltför långt driven känslighet medför dessutom en ökad osäkerhet i jämviktslägets inställning, som gör vinsten av den större känsligheten illusorisk. Man föredrager att hålla känsligheten måttligt stor och vinner då i snabbhet och säkerhet.

Vid *bestämning* av känsligheten K belastar man vågskålarna med vikterna P resp. W. Man placerar ryttaren på det delstreck som svarar mot 1 mg på den ena sidan av ryttarbalken och avläser jämviktsläget. Därpå flyttar man ryttaren till motsvarande delstreck på den andra sidan. Ändringen i jämviktsläget svarar då

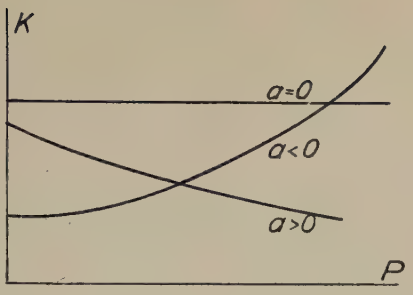


Fig. 4. Känslighetskurvor för vågar med vertikalavstånd mellan eggarna $a \gtrless 0$. Det antages att vågbalken icke nedböjes.

mot känslighetens *dubbla* värde. Känslighetsbestämning utföres med en belastning av 0, 10, 20, 50 och 100 g på vågskålarna. För varje belastning skall 5 bestämningar utföras. Av dessa bildas sedan ett medelvärde. Känsligheten brukar angivas i dubbelutslag (se § 2).

Man uppritar ur dessa värden på känsligheten i dubbelutslag ett diagram, som visar känsligheten som en funktion av belastningen. Ur detta diagram kan man sedan vid alla vägningar på ifrågavarande våg avläsa den för den aktuella belastningen gällande känsligheten.

5. Svängningskonstanten C

Mellan en vågs svängningstid τ och *vinkelkänsligheten* K/l_t råder sambandet:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{2(P+M)l^2+J}{2(P+M)a+Qd} \cdot \frac{1}{g}} = C\sqrt{\frac{K}{l_t}} \qquad (11)$$

där J är vågbalkens tröghetsmoment. C är sålunda en storhet, som är beroende av vågens och belastningens tröghetsmoment och alltså varierar med den senare. Löses C ur ekv. (11), erhålles

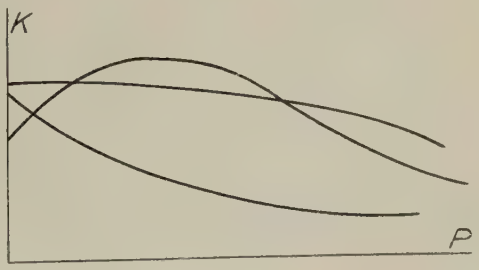


Fig. 5. Känslighetskurvor för vågar med olika vertikalavstånd mellan eggarna i de fall vågbalken nedböjes.

$$C = \tau \sqrt{\frac{l_t}{K}} \text{ sek. mg}^{\frac{1}{2}} \qquad (12)$$

där l_t är vågtungans längd i skaldelar. För analysvågar är C av storleksordningen 100.

Vid *bestämning* av svängningskonstanten C observerar man det antal sekunder, som förflyta mellan den tidpunkt, då vågtungan passerar skalans mittpunkt och den, då tungan ånyo passerar skalans mittpunkt från *samma* håll (5 bestämningar), uppmäter l_t (uttryckt i skaldelar) och beräknar C ur ekv. (12). Svängningskonstanten bestämmes lämpligen med en belastning av 0, 10, 20, 50 och 100 g på vågskålarna.

6. Vågens osäkerhet

Det är av stor vikt att man känner den osäkerhet i viktbestämningen som alltid förefinnes, så att man icke överskattar precisionen i de erhållna värdena. Man kan bestämma osäkerheten genom att göra en serie (n) bestämningar av jämviktsläget, taga medelvärdet $\bar{s} = \Sigma s/n$, och uppskatta medelfelet för en enstaka bestämning $= \sqrt{\Sigma(s-\bar{s})^2/(n-1)}$. Enklare och endast föga mindre noggrann är den uppskattning av osäkerheten som består i att man bestämmer jämviktsläget 10 gånger i följd och beräknar variationsbredden $b = s_{max} - s_{min}$, vilket utföres för olika belastningar (0, 10, 20, 50, 100 g). Denna variationsbredd är i medeltal 3,08 gånger medelfelet, och det senare blir på detta sätt bestämt med ungefär samma noggrannhet som från 9 avläsningar, om den förstnämnda formeln användes. Anger man då osäkerheten i en enstaka vägning som medelfel $= \pm b/3K$, har man 68 % sannolikhet för att den verkliga vikten skall ligga inom dessa felgränser, men anger man den som $\pm b/2K$, har man 13 % risk och om man anger den som $\pm b/K$ blott 0,2 % risk att så icke är fallet. Vid fysikaliska mätningar är det oftast brukligt att ange medelfelet, men stundom anges andra konfidensgränser, och det är inte alla som ange vilken risknivå som åsyftas. Ofta arbetar man med risknivån 5 % och har då konfidensgränserna $\pm b/1{,}6K$ eller med 1 % och har då $\pm b1{,}2K$.

Vågens osäkerhet kan man bestämma i samband med bestämningen av dess känslighet. Man har t. ex. fått följande värden vid 10 bestämningar av jämviktsläget vid en viss belastning: 3,0 3,2 3,4 3,1 3,3 3,2 2,9 3,1 3,4 3,2 (dubbelutslag); $\bar{s} = 3{,}2$; $s_{min} = 2{,}9$; $s_{max} = 3{,}4$; $b = s_{max} - s_{min} = 0{,}5$ skaldelar, varav medelfelet uppskattas till $\pm 0{,}17$, medan det noggrannare värdet beräknas till $\pm 0{,}16$ skaldelar. Om känsligheten vid denna belastning är $K = 5{,}0$ skaldelar/mg (dubbel-

utslag), motsvarar detta ett medelfel i vikten av ±0,03 mg. Men om man vill ha risknivån så låg som 1 % bli konfidensgränserna ±0,4 skaldelar, resp. ±0,08 mg. Tecknen ± ange att felet lika gärna kan vara åt det ena hållet som åt det andra.

7. Vågens olikarmighet

Belastar man vågskålarna med lika stora vikter, är det önskvärt, att jämviktsläget alltid ligger i närheten av den obelastade vågens jämviktsläge. Detta kan icke ske, om vågarmsförhållandet l_h/l_v avsevärt avviker från 1.

Vid prövning av en analysvåg bör man bestämma vågarmsförhållandet. Lämpligast är att först beräkna skillnaden mellan vågarmslängderna, olikarmigheten $\Delta l = l_h - l_v$.

Vågen belastas med två nominellt lika tunga vikter P_1 och P_2, vilka icke behöva vara kalibrerade. Ekv. (6) blir då:

$$P_1(l_v + a\alpha_1) + [(M_v + M_h)a + Qd](\alpha_1 - \alpha_{01}) = P_2(l_h - a\alpha_1) \qquad (13)$$

Man låter vikterna byta vågskålar:

$$P_2(l_v + a\alpha_2) + [(M_v + M_h)a + Qd](\alpha_2 - \alpha_{02}) = P_1(l_h - a\alpha_2) \qquad (14)$$

Om icke jämviktsläget för den obelastade vågen är inom osäkerhetsgränserna (§ 6) lika före och efter vägningarna ($\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0$), måste dessa förkastas. Ekv. (13) och (14) adderas och $l_h - l_v = \Delta l$ löses:

$$\Delta l = \frac{(P_1 + P_2)a(\alpha_1 + \alpha_2) + [(M_v + M_h)a + Qd](\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_0)}{P_1 + P_2} \qquad (15)$$

Vi sätta $P_1 + P_2 = 2P$ och $M_v + M_h = 2M$ och få

$$\Delta l = \frac{[2(P + M)a + Qd](\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_0) + 4Pa\alpha_0}{2P} \qquad (16)$$

Om den obelastade vågens jämviktsläge ligger nära skalans mittpunkt, så att α_0 är mycket mindre än $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_0$, kan den sista termen i täljaren försummas. Införes vidare $(\alpha_1 - \alpha_0)l_l = s_1 - s_0$, vågens känslighet K enl. ekv. (10) och sättes $l_h \approx l_v = l$, fås

$$\Delta l = \frac{l(s_1 + s_2 - 2s_0)}{2KP} \qquad (17)$$

I detta uttryck behöver man inte sätta in den kalibrerade vikten för P, utan man kan direkt använda det på vikten stämplade värdet, då osäkerheten i bestämningen av s är mycket större än felen i vikterna. Av samma anledning erhåller man l med tillräcklig noggrannhet genom att mäta vågbalkens längd med en millimeterskala. Vågarmsförhållandet beräknas ur relationen:

$$\frac{l_h}{l_v}=1+\frac{\Delta l}{l_v} \qquad (18)$$

Praktiskt *bestämmer* man olikarmigheten på följande sätt: Först avläses jämviktsläget för den obelastade vågen, nolläget s_{01}, därefter placeras på vardera vågskålen t. ex. en 100 g vikt och utslaget s_1 avläses. Man låter de bägge vikterna byta vågskålar och avläser utslaget s_2. Sedan avläses s_{02}. Ur (17) beräknas Δl och medelvärde tages av 5—6 sådana observationsserier.

Δl skall bestämmas för en belastning av 10, 20, 50 och 100 g på vågskålarna.

Ex.: Vi antaga att vågarmens längd är 67 mm. Vidare antaga vi, att jämviktsläget för den obelastade vågen under vägningens gång icke förskjutit sig, att sålunda $s_{01}=s_{02}=s_0=10{,}2$, att $s_1=12{,}6$ och $s_2=5{,}8$ och att $K=5{,}0$; allt i dubbelutslag. $P=100$ g$=10^5$ mg.

$$\Delta l=\frac{67(12{,}6+5{,}8-2\cdot 10{,}2)}{2\cdot 5{,}0\cdot 10^5}=-\frac{67\cdot 2{,}0}{10^6}=-1{,}3\cdot 10^{-4}\text{ mm}=-0{,}1\mu$$

Tillfällig olikarmighet hos vågen kan förorsakas av *temperaturskillnad* mellan *armarna* och av fel härrörande från *eggarna.*

Temperaturskillnaden mellan armarna uppgår sällan till mer än 0,2° C, men redan en sådan temperaturdifferens kan betyda mycket vid noggranna vägningar (ändring av Δl med 0,2 μ i exemplet ovan). För att skydda sig däremot bör man ha vågen stående i ett jämnt uppvärmt rum, ha belysningen anbragt mitt över vågen (skydd för solen!) samt aldrig väga föremål som ha om än obetydligt högre temperatur än vågen. Före mycket noggranna vägningar bör vågskåpets dörrar stå öppna $^1/_2$ timme, så att vågen luftas och får samma temperatur som ytterluften. Annars kunna luftströmningar lätt uppstå.

Fel härrörande från eggarna. Dammbeläggning på eggarna eller sned upphängning av vågskålarna kan förorsaka en förskjutning av vågarmens effektiva längd åt ena eller andra hållet. Eggarna äro nämligen icke ideala linjer utan — om de ej äro skadade — cylinderytor (radie 2—5 μ), och deras parallellitet kan vara bristfällig. För att sistnämnda omständigheter icke skola medföra att vågens utslag blir starkt beroende av belastningens placering på vågskålarna, måste upphängningsoken vara försedda med korsaxlar och mellanxlar. — Mot tillfälliga fel, t. ex. dammbeläggning, skyddar man sig i viss mån genom att bestämma jämviktsläget för den obelastade vågen *före och efter varje vägning* och man förkastar vägningar, om detta jämviktsläge förskjutits med mera än vågens normala osäkerhet. (Forts.)

PHILIPS

vridtransformatorer

ge kontinuerlig och praktiskt taget förlustfri spänningsreglering

Philips vridtransformatorer äro utomordentligt lämpliga för laboratoriebruk och för inbyggnad i permanenta utrustningar av olika slag. Transformatorerna levereras därför dels som bordstyp dels för inbyggnad i instrumentutrustningar. Transformatorerna ge kontinuerlig reglering mellan nollspänning och ett värde som ligger ca 20 % över den spänning till vilken transformatorn anslutes. Följande typer finnas:

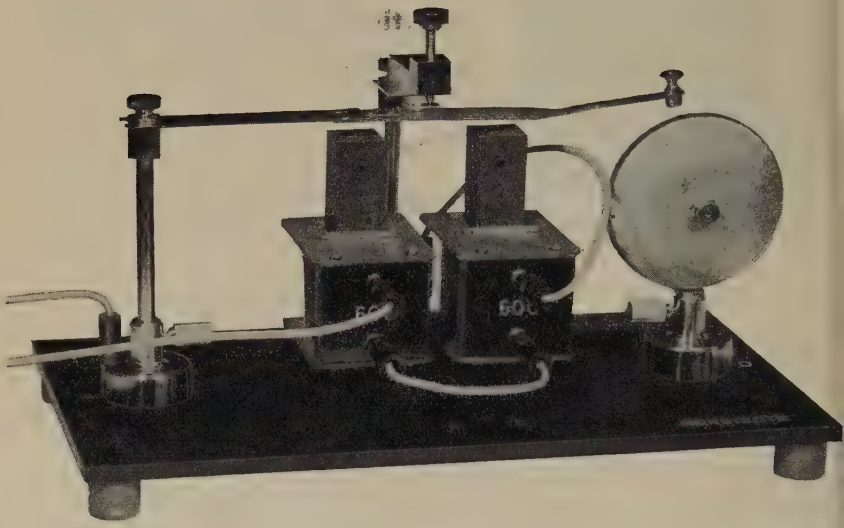
Primärspänning V	Effekt VA	Primärspänning V	Effekt VA
110	360	220	130
110	730	220	260
130	175	220	520
130	350	220	1040
130	690	220	2080
130	1380		

Bordstransformatorerna i storlekar t. o. m. 1040 VA ha inbyggd smältsäkring i kontaktarmsledningen medan inbyggnadstransformatorerna sakna säkring.

Begär specialprospekt och prisuppgifter från Philips Mätinstrumentavdelning, Stockholm 6. Tel. 340580, för rikssamtal 340680.

PHILIPS

Materiel för elevlaborationer



Elektrisk ringklocka byggd med delar ur den elektriska laborationssatsen.

Med Norstedts laborationssatser kan laborationer utföras inom matematik, värmelära, optik, elektricitetslära och kemi.

Materielen förvaras i specialinredda trälådor och på plintar avsedda för 6, 8 eller 10 grupper.

Prisuppgift och beskrivning på begäran.

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm 1

Fotogrammetri I

Av professor B. Hallert, Stockholm

Fotogrammetri, även kallad *bildmätning*, är läran om mätningar i fotografiska bilder för att fastställa geometriska egenskaper, såsom storlek, form och läge hos det fotograferade föremålet. Gränsen mot begreppet *fotografisk registrering* kan emellertid stundom vara något flytande. På senare tid har en viss tendens kunnat märkas att till fotogrammetrin även hänföra uppgifter såsom tolkning av fotografiska bilder (bildtolkning eller bildläsning).

Fotogrammetrin daterar sig från mitten av 1800-talet, då den franske översten Laussedat började utnyttja de sedan omkring 1840 förekommande fotografiska bilderna för mätändamål.

Från början fotograferade man från marken, *mark-* eller *terrester fotogrammetri*, men redan år 1859 gjordes det första kända försöket att fotografera från luften, och därmed inleddes *flygfotogrammetrins* utveckling.

I våra dagar dominerar flygfotogrammetrin kraftigt över markfotogrammetrin, men den senare är därför icke betydelselös. Fotogrammetrins ursprungliga och ännu viktigaste användning avser framställning av kartmaterial över terräng (kartografisk fotogrammetri), men ett stort antal andra användningsområden, emellan astronomi och mikroskopi (specialfotogrammetri), har utvecklats, och denna utveckling fortgår. Vissa användningsområden är tämligen väl avgränsade och har fått speciella benämningar, t. ex. röntgenfotogrammetri, skoglig fotogrammetri, mikrofotogrammetri, geologisk fotogrammetri etc. Ännu föreligger dock icke någon i alla avseenden tillfredsställande indelning av fotogrammetrin.

Fotogrammetrins viktigaste uppgifter och hjälpmedel

Fotogrammetrins första och viktigaste uppgift är att utgöra hjälpmedel vid kartframställning över terräng. Den räknas därför stundom såsom en gren av *geodesin*, vetenskapen om jordens uppmätning. De geodetiska metoder som helt eller delvis kan ersättas av fotogrammetrin brukar i jämförelse med den senare betecknas såsom *klassiska*.

Erfarenheten har visat, att betydande delar av det tidskrävande geodetiska detaljmätningsarbetet och även åtskillig stommätning [1]

[1] Genom *stommätning* anskaffas stödpunkter (fixpunkter) för den efterföljande detaljmätningen.

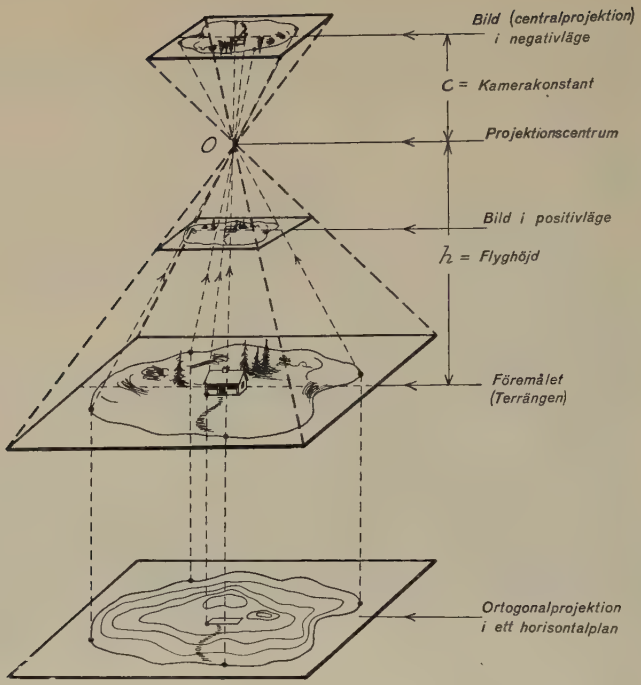


Fig. 1. Schematisk bild av strålgången vid avbildning av ett föremål (terräng) i ortogonal- och centralprojektion. Även nivåkurvorna, som förbinder punkter på samma höjd i föremålet, avbildas i ortogonalprojektion.

Vid avbildning genom objektiv är negativläget av bilden det naturliga. Positivläget (då bilden tänkes förlagd symmetriskt till negativläget på andra sidan projektionscentrum) är emellertid betydligt överskådligare.

med fördel kan ersättas av fotogrammetriska metoder, medan å andra sidan fotogrammetrin alltid måste förutsätta, att den grundläggande stommätningen och kompletterande detaljmätningar utföres med geodetiska metoder.

Den fotogrammetriska metodiken vid kartläggning av terräng kan i många avseende principiellt tjäna såsom förebild vid en översiktlig framställning av fotogrammetrins användning och uppgifter även inom andra områden.

I de flesta fall önskar man erhålla en karta eller avbildning av ett föremål i form av en *ortogonalprojektion* i bestämd skala i ett plan. Vid ortogonalprojektion avbildas föremålet i planet i viss skala genom strålar, dragna vinkelrätt (ortogonalt) mot detta.

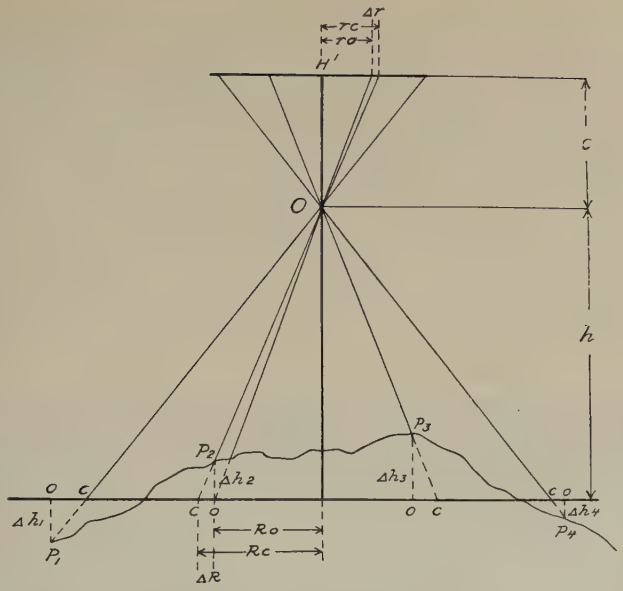


Fig. 2. Vertikalsnitt genom strålkärve och projektionscentrum hos lodbild över kuperad terräng. Bildskalan är enhetlig endast för ett horisontalplan i terrängen och är c/h, där h är flyghöjden över vederbörande plan och c är kamerakonstanten (i regel nära lika med kamerans brännvidd).

Jfr fig. 1. Fördelarna med en sådan avbildningsform är uppenbara. Avstånd, vinklar och arealer i planet är oberoende av höjdskillnaderna. Av fig. 1 framgår även avbildningen genom *central*projektion vid fotografering. Avbildningen tänkes *geometriskt sett* äga rum genom linjer eller strålar från föremålets punkter genom en gemensam punkt, *projektions-* eller *perspektivcentrum O*, som schematiskt motsvarar kamerans objektiv. Bilden uppstår i negativplanet, där den uppfångas och fasthålles av det ljuskänsliga materialet. I princip är förhållandena analoga vid synprocessen.[1]

Det framgår omedelbart, t. ex. av fig. 1 och 2, att centralprojektionen kan bli identisk med ortogonalprojektionen, men endast under förutsättning att föremålet är ett plan och att bild- och föremålsplan äro parallella med projektionsplanet. Bildens skala

[1] Självfallet kan bildpunkterna fasthållas med andra medel än fotografisk avbildning. Det finns t. ex. *tecknade perspektiv*, som kan användas för mätändamål. Den fotografiska avbildningens egenskaper är dock så överlägsna andra förfaranden att fotografin helt dominerar.

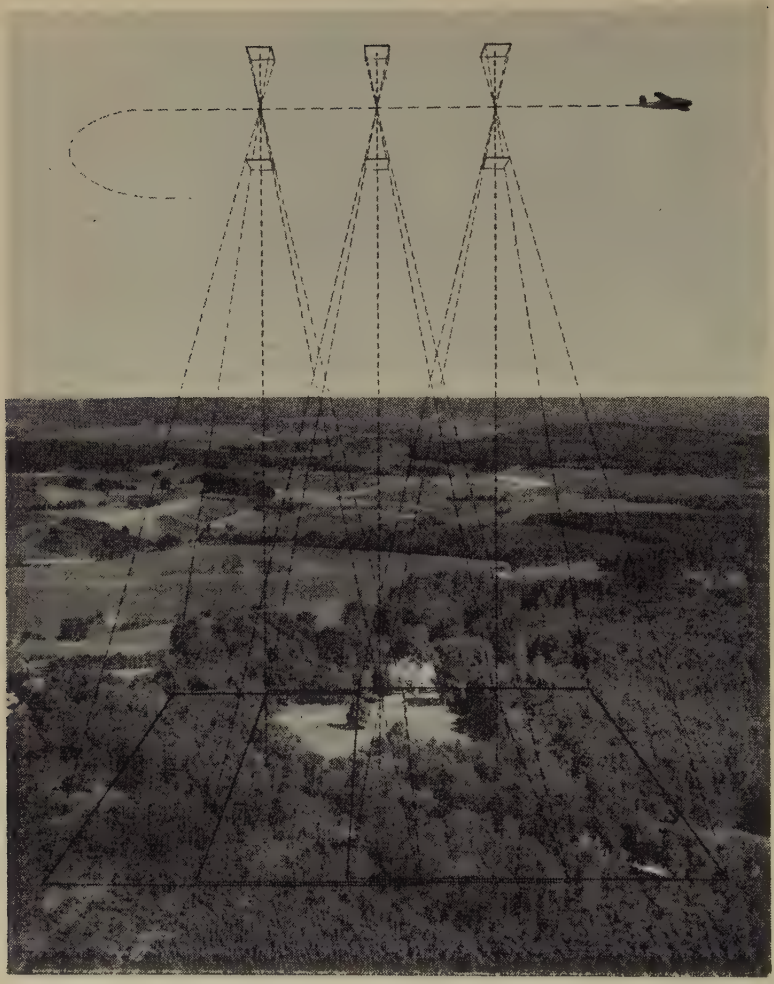


Fig. 3. Schematisk bild av flygfotografering över terräng. Bilderna fotograferas med omkring 60 % övertäckning.

blir c/h, där c och h är bild- resp. föremålsplanens avstånd från projektionscentrum O. Av fig. 2 framgår omedelbart vilka avvikelser som föreligger mellan central- och ortogonalprojektion av ett kuperat föremål. Avvikelserna $c-o$ benämnes *höjd*(skillnads)-*förskjutningar*. De sammanhänger — beräknas ur likformiga trianglar — med vederbörande punkts höjd ($\triangle h$) över projektions-

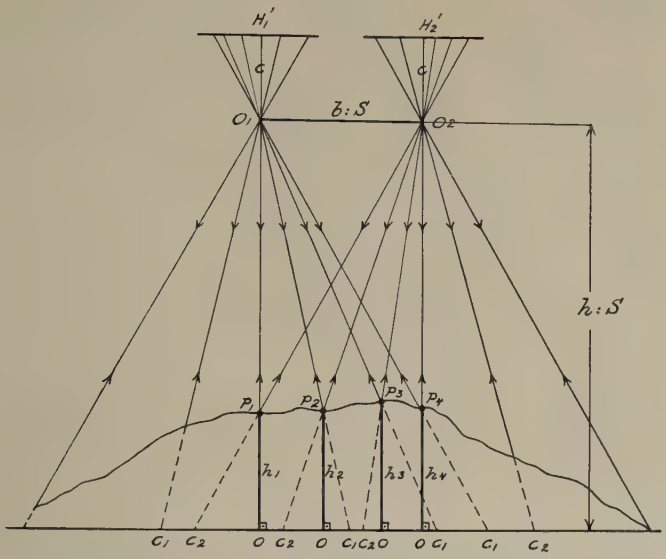


Fig. 4. Schematisk bild av strålgången vid flygfotograferingen (fig. 3) samt rekonstruktionen av strålgången vid bearbetningen (fig. 5).

planet och dess avstånd från centrum. Om bild- och projektionsplan icke är parallella, tillkommer dessutom *lutningsförskjutningar*, som dock kan korrigeras genom bildens *rektifiering*, en projektiv transformation (se forts. i ett kommande häfte av tidskriften). De nu berörda höjdförskjutningarna är den enstaka fotografiska bildens största nackdel vid bildens direkta användning såsom karta.[1] Punktlägen och funktioner därav, såsom längder, vinklar och arealer påverkas av föremålets höjdskillnader och blir vidare beroende av bland annat varifrån bilden fotograferats (bildorten).[2]

Fotogrammetrins *huvuduppgift* kan nu formuleras på följande sätt: *Att av en eller flera centralprojektioner* (fotografiska bilder) *av ett föremål framställa en avbildning i ortogonalprojektion av detsamma i ett givet plan.*

Av denna definition av huvuduppgiften framgår, att i det all-

[1] Såsom nedan särskilt skall behandlas är dock samtidigt dessa förskjutningar av det största värde inom fotogrammetrin, emedan de utgör den första förutsättningen för stereobetraktningen och stereomätningen. Detta framgår även direkt av fig. 4.

[2] Jfr HALLERT: Om numerisk transformation av sträckor, arealer och vinklar från central- till ortogonal projektion. Sv. Lantm.-tidskr. 1947: 6.

männa fallet minst två fotografiska bilder erfordras för framställningen av ortogonalprojektionen. Bearbetningsmetodiken benämnes *dubbelbilds-* eller *tvåbildsmätning*.[1]

Om föremålet är ett plan, vilket innebär ett specialfall, kan en ortogonalprojektion framställas även genom bearbetning av en bild i taget. Man talar då om *enkelbilds-* eller *enbildsmätning*. Den i praktiken viktigaste formen av enbildsmätning är optisk-mekanisk *rektifiering*. Genom detta förfarande kan en flygbild, som fotograferats såsom icke-lodbild, omfotograferas så att den får lodbildens geometriska egenskaper och bestämd skala.

Närmast skall i största korthet dubbelbildsmätningens grundprinciper och deras utformning i den åskådliga *dubbelprojektorn* beröras.

Vid fotograferingen tas bilderna med sådan övertäckning (omkring 60 % i längd och 20—40 % i sidled) att hela föremålet blir dubbelt fotograferat. Jfr fig. 3. De geometriska förhållandena vid fotograferingen framgår av fig. 4.

Om bilderna framkallas (ev. förminskas) och inlägges i projektorer, som är kongruenta med kameran (ev. likformiga förminskningar av densamma) och belysas från baksidan, rekonstrueras de strålar som vid fotograferingen förmedlade avbildningen. *Avbildningsproceduren rekonstrueras alltså optiskt.* Om de båda projektorerna bringas att intaga samma inbördes lägen som kameran vid fotograferingen, *kommer sammanhörande strålar från de båda projektionerna att skära varandra.* Sammanfattningen av alla sådana skärningspunkter ger en med det fotograferade föremålet likformig *optisk modell*, jfr fig. 5. Denna modell kan skalbestämmas genom ändring av projektorernas inbördes avstånd, och vidare kan den genom vridningar och förskjutningar givas samma läge i förhållande till ett projektionsplan som föremålet hade till ett analogt referensplan (i fråga om terräng vanligen ett horisontalplan). Modellen kan därefter ur mätningsteknisk synpunkt behandlas som föremålet självt. Av fig. 5 framgår hur den kan nedlodas ortogonalt i projektionsplanet och hur nivåkurvor kan ritas, likaledes i ortogonalprojektion. Därmed är huvuduppgiften genomförd.

Denna schematiskt skisserade princip att genom omvändningen av fotograferingsproceduren framställa en optisk modell och därefter utföra mätningar i modellen i stället för i föremålet är betecknande för många former av dubbelbildsfotogrammetri. Precisionen och fullständigheten kan drivas mycket långt, ej minst

[1] Då stereoseendet användes i samband med bearbetningen, användes även uttrycket *stereomätning*.

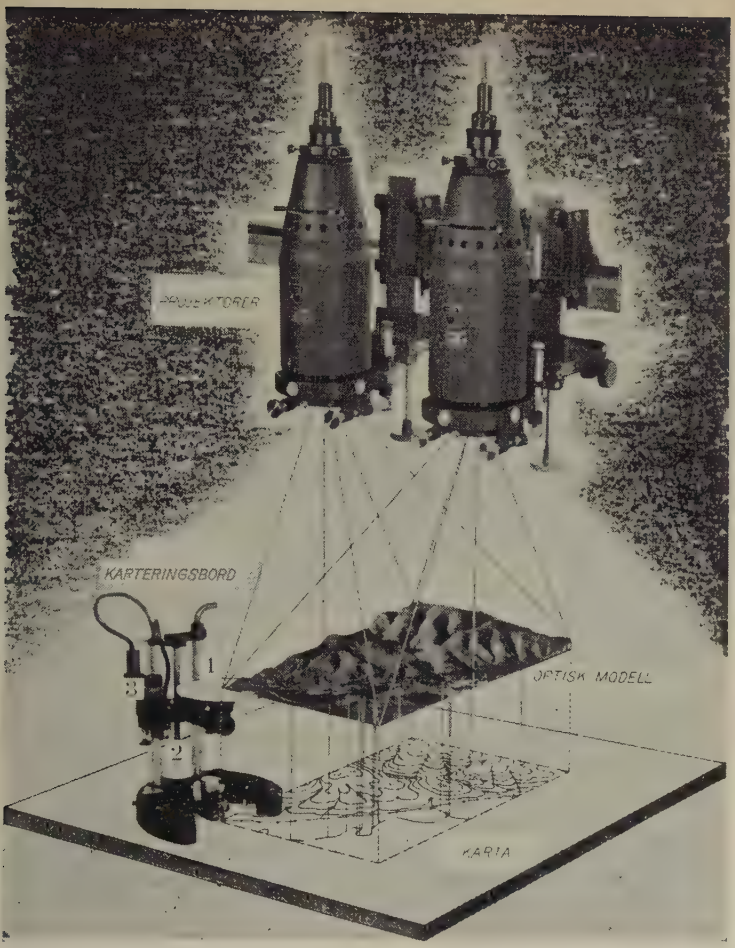


Fig. 5. Dubbelbildsmätningens grundprincip, sådan den förverkligas i dubbelprojektorn *multiplex*.

Karteringsbordets skiva (1) bär i sitt centrum ett litet lysande mätmärke. Skivan kan inställas i höjdled medelst skruven (2), och avläsningen av höjdläget sker på skalan (3). Ett ritstift befinner sig lodrätt under mätmärket.

Modellen uppfattas stereoskopiskt med hjälp av anaglyfmetoden (bilderna projicieras genom röda och gröna filter och färgblandningen betraktas genom glasögon i motsvarande färger, varvid vartdera ögat endast ser *en* bild). Rummet måste i övrigt vara nästan mörkt.

Modellens punkter kan succesive inställas på mätmärket genom att karteringsbordet med handen föres över ritbordet. En nivåkurva erhålles, då mätmärket på konstant höjd tangerar modellens yta.

Fig. 6. Precisionsinstrument för fotogrammetrisk dubbelbildsmätning. Instrumentet kallas autograf A 7 och är av schweizisk konstruktion. Observatören (t. v.) ser i instrumentet en stereoskopisk modell av det fotograferade föremålet och kan med två handrattar och en fotskiva förflytta ett vandrande rymdmärke till alla punkter i denna modell. Ritstiftet på ritbordet (t. h.) följer automatiskt rymdmärkets horisontalrörelser och ritar en ortogonalprojektion av föremålets konturer. Höjderna avläses på en höjdskala. Ett instrument av denna typ kostar f. n. närmare 200 000 kronor.

tack vare användningen av stereoseendet i samband med mätningarna. Instrumenten kan dock vara mycket komplicerade, fig. 6.

Utan svårighet inses vilka möjligheter den skisserade fotogrammetriska mätmetodiken innebär. Vid kartläggning av terräng flyttas hela avsnitt in i arbetsrummet i form av optiska modeller och karteras. Fotograferingen kan göras från luften eller från marken. Självfallet är kartläggningen från luften av speciellt militärt intresse. Föremål som är särskilt stora eller särskilt små kan uppmätas på liknande sätt och karteras i lämplig förminskning eller förstoring. Föremål i rörelse, svåråtkomliga, ömtåliga och föränderliga föremål osv. kan uppmätas med liknande metoder. Undan för undan tillkommer nya användningsområden, och en betydande utveckling äger rum på redan kända sådana, exempelvis den skogliga fotogrammetrin. Av särskilt värde för många ändamål, särskilt inom medicinen, är röntgenfotogrammetrin, som dock ännu icke fått den utveckling och användning den förtjänar.[1] (Forts.)

[1] Ovanstående uppsats ansluter sig till inledningskap. i B. HALLERT, »Fotogrammetriens grunder», som beräknas utkomma hösten 1952 på Norstedts förlag.

Fältelektronmikroskopet

Av lektor Eve Staffansson, Göteborg

De optiska instrumenten kan med rätta betraktas som den naturvetenskapliga forskningens trotjänare; i mer än tre sekler har de lämnat ovärderliga bidrag till utvecklingen, kikaren, refraktorn, vid studiet av makrokosmos, mikroskopet vid studiet av mikrokosmos. Det första mikroskopet konstruerades sålunda redan vid slutet av 1500-talet. Den följande utvecklingen kom att dikteras nästan uteslutande av de resultat, som vunnits på empirisk väg. Först 1872 framlades av Abbe, vid den tiden professor i teoretisk fysik i Jena och föreståndare för astronomiska observationer där, en fullständig teori, som kom att få en avgörande betydelse för mikroskopets vidare utveckling, där kraven på förstoring och i ännu högre grad på upplösningsförmåga kom att ställas högre och högre.

Upplösningsförmågan hos ett mikroskop

Ett modernt mikroskop kan under gynnsamma betingelser ge en förstoring upp till ca 1000. Redan Abbe visade emellertid, att instrumentets prestationsförmåga bestämmes väsentligen av ljusets vågnatur; en ytterligare förstoring skulle därför ej ge nya detaljer i bilden. På grund av ljusets vågnatur ger objektivet ej punktformiga bilder av objektets olika punkter; dessa avbildas i stället (vid cirkulära öppningar) som små cirkulära ytor, s. k. »böjningscirklar» jämte mindre framträdande koncentriska ringar). Härigenom sättes en undre gräns (d) för avståndet mellan två punkter, upplösningsförmågan, för att bilderna av dessa efter brytning i objektivet och böjning kring dess rand skall vara separerade; vid passande förstoring uppfattar ögat dessa som två skilda bilder, en ytterligare ökning av förstoringen skulle endast medföra en förstoring av böjningscirklarna, några nya detaljer framträder ej. Man talar i ett sådant fall om tom förstoring. För upplösningsförmågan d (vid cirkulär öppning) härleddes redan av Abbe uttrycket

$$d = 1{,}22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}$$

där λ betyder våglängden för det använda ljuset, n brytningsindex för mediet mellan objektet och objektivet samt α halva öppnings-

vinkeln för den strålkon, som har sin spets i objektet och som träffar objektivet; uttrycket $n \sin \alpha$ benämnes den numeriska aperturen.

Denna formel anger direkt de två vägar, efter vilka man har att vinna en ökad upplösningsförmåga:

1. Ökning av objektivets numeriska apertur.
2. Minskning av det använda ljusets våglängd.

Den första vägen har sedan länge följts. Öppningsvinkeln 2α kan teoretiskt närma sig 180°. Betydande krav ställes emellertid på objektivets korrigering vid stora öppningsvinklar, och ett effektivt utnyttjande av dessa fordrar därjämte att immersionsprincipen tillämpas, dvs. att rummet mellan objekt och objektiv utfylles med ett ämne med högre brytningsindex ($n > 1$). Som immersionsvätska begagnas vatten, glycerin eller monobromnaftalin ($n = 1{,}66$). På detta sätt kan upplösningsförmågan stegras till ca 2000 Å.

En ytterligare stegring av upplösningsförmågan kan, som ovan antytts, uppnås genom att man begagnar mera kortvågigt ljus (ultraviolett ljus); en komplikation tillkommer emellertid därigenom att glasoptiken i detta fall måste ersättas med kvartsoptik och en fotografisk registrering av bilden företagas. Gränsen för upplösningsförmågan kan då sättas till 1000 Å.

Denna relativt sett låga ökning av upplösningsförmågan har dock kommit att spela en ganska stor roll speciellt vid undersökning av den levande cellen. Man har upptäckt, att inom det använda spektralområdet uppvisar de i cellen ingående nukleinsyrorna en specifik, selektiv absorption, varigenom analysen av en sådan ultraviolett upptagning medgett ett noggrant fastställande av dessa ämnens fördelning inom cellen.

Små partiklar av storleken ned till 40 Å (t. ex. i kolloidala suspensioner), s. k. submikroskopiska partiklar, kan iakttagas i det av Siedentopf och Zsigmondy 1903 angivna ultramikroskopet. Partiklarna belyses härvid med starkt ljus, bildande en vinkel av ung. 90° med objektivets optiska axel; genom ljusets böjning kring partiklarna kommer en del av ljuset att passera in i mikroskopet, och i synfältet iakttages ljusa punkter på mörk bakgrund. Här är det dock ej längre fråga om avbildning i sedvanlig bemärkelse utan om ett interferensfenomen. Någon upplysning om partiklarnas struktur erhålles således ej (med vissa undantag), endast ett kriterium på deras existens.

Ökning av upplösningsförmågan. Elektronoptik

Mikroskop av nu omnämnd typ erbjuder ingen möjlighet för inblick i den molekylära världen. Villkoret härför är i första hand

en ökning av upplösningsförmågan med en eller två 10-potenser; detta i sin tur förutsätter en våglängd hos den för observationen använda strålningen, som med några 10-potenser understiger den, som kommit till användning i det sedvanliga ljusmikroskopet. Vågmekaniken anvisar den väg, som möjligen kunde leda till detta eftersträvansvärda mål. De Broglie konstaterade 1924, att partiklar, exempelvis elektroner, i rörelse kan tillskrivas vågegenskaper; med partikelns rörelse associeras sålunda en vågrörelse, där våglängden λ bestämmes ur relationen

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

där h är Plancks konstant, m massan och v hastigheten hos partikeln. Hastigheten hos en laddad partikel (elektron) bestämmes enligt energiprincipen av den accelererande spänningen U, som partikeln genomlupit:

Spänning i volt	10 000	20 000	50 000	100 000	200 000
Våglängd i Ångström	0,12	0,086	0,054	0,037	0,024

Elektronstrålar i vakuum utbreder sig rätlinigt liksom ljusstrålar och devieras i rotationssymmetriska, elektriska och magnetiska fält som ljusstrålar i linser; man kan tala om en geometrisk elektronoptik, av samma värde för elektronmikroskopet som den geometriska optiken för vårt ljusmikroskop. Av parallelliteten har man vidare att vänta, att elektronmikroskopets upplösningsförmåga bestämmes av våglängden hos den till elektronen associerade vågrörelsen; de accelerationsspänningar man sedvanligen räknar med (35 000—100 000 V) innebär, att denna våglängd är ca 100 000 gånger mindre än ljusvåglängden. Man kan dock ej räkna med en ökning av upplösningsförmågan i samma förhållande, väsentligen beroende på elektronmikroskopets numeriska apertur, vilken är 100 till 1000 gånger mindre än i ljusmikroskopet.

För att något klargöra analogin mellan ljus- och elektronmikroskopet beröres i korthet elektronstrålens deviation. Elektronens bana sammanfaller med fotonens (ljusstrålen), om mediets brytningsindex (n) för den senare är proportionellt mot elektronens hastighet; för denna gäller i en viss punkt:

$$v \sim \sqrt{U_0 + U}$$

där U är potentialen i nämnda punkt (relativt katoden) och U_0 ett mått, i spänningsenheter, på den energi elektronen har omedelbart efter emissionen före inträdet i accelerationsfältet. Då de emitterade elektronerna i allmänhet har olika utgångshastighet,

har de också i en viss punkt i banan med bestämd potential olika hastighet, dvs. elektronbanans deviation i denna punkt blir olika för olika elektroner, en motsvarighet till ljusets dispersion. Förhållandet benämnes elektronoptikens »kromatiska effekt».

Värdet av en elektrisk eller magnetisk elektronlins beror nu väsentligen på dess förmåga att ge en avbildning, där felen reduceras till oväsentliga belopp. Elektronlinser uppvisar samma slag av fel som ljusoptikens linser, men då bildvinkeln vid elektronoptisk avbildning alltid är mycket liten, spelar i första hand den sfäriska och kromatiska aberrationen jämte komafelet en viss roll. En korrigering av de två förstnämnda felen kan endast ske, om definierade rymdladdningar finns i det rum, elektronerna genomlöper (en elektronlins med spridningseffekt föreligger ännu ej; jfr akromatiskt objektiv). Den utomordentliga avbildningsförmåga, som elektronmikroskopet uppvisar, trots okorrigerade linser, sammanhänger väsentligen med att den numeriska aperturen är mycket liten, ung. 1/100—1/1000 av ljusmikroskopets; att en så ringa apertur ger god avbildning utan störande böjningsfenomen beror i sin tur på de Broglie-våglängdens ringa storlek (se tab. sid. 100) samt därjämte på, att belysningsstyrkan är utomordentligt hög i elektronoptiken jämfört med i ljusoptiken, i bästa fall 10^6 till 10^7 gånger större med elektroner än ljusstrålar.

I elektronmikroskopet är den sfäriska aberrationen liksom vid ljusmikroskopet proportionell mot kvadraten på aperturen; vid liten apertur blir därför detta fel i praktiken utan större betydelse. Den kromatiska aberrationen däremot, som är proportionell mot aperturen, måste begränsas och liksom vid ultraviolett-mikroskopet måste man tillgripa i sträng mening monokromatisk strålning, dvs. elektroner av nästan exakt samma hastighet. Strålningens inhomogenitet med avseende på våglängden bestämmes av relationen

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta U}{2U}$$

Vid moderna elektronmikroskop kan denna kvot nedbringas till ungefär 1/25 000, motsvarande en variation i de Broglie-våglängden på 0,004 %. En uppfattning om monokromasien erhåller man kanske bäst genom att påpeka, att denna är mindre än 1/50 av våglängdsdifferensen mellan de gula D-linjerna i natriums spektrum. Sammanfattningsvis gäller, att elektronmikroskopets upplösningsförmåga är ungefär 100 gånger ljusmikroskopets eller ca 10 Å och dess förstoring 50 gånger större eller ca 50 000. Den ringa aperturen medför ännu en fördel, nämligen en oerhört mycket större djup-

skärpa vid elektronmikroskopet, något som är av betydande värde, då behov av stereoskopisk bildframställning föreligger.

Liksom vid ljusmikroskopet ställer man sig här frågan vad som begränsar instrumentets upplösningsförmåga; gränsen för denna bestämmes här inte enbart av böjningsfenomen som vid ljusmikroskopet utan därjämte av elektronlinsernas avbildningsfel, främst den sfäriska och kromatiska aberrationen. Upplösningsförmågan (d), beräknad under beaktande av ovan nämnda tre faktorer, kan analogimässigt framställas så:

$$d \sim (f)^{\frac{1}{4}} \cdot U^{-\frac{3}{8}}$$

där f är objektivbrännvidden och U accelerationsspänningen. Att en avsevärd ökning av upplösningsförmågan ej kan erhållas genom ökning av spänningen beror på att brännvidden i sin tur är proportionell mot spänningen; man kan nämligen inte med hänsyn till järnets magnetiska mättning (magnetlinser) i praktiken öka den magnetiska fältstyrkan (för strålens deviation) utöver en viss gräns. Det gynnsammaste fallet inträder vid en spänning av omkring 60 kV. En väsentligt ökad spänning skulle i första hand medföra en avsevärd minskning i bildens kontrast på grund av elektronernas ökade hastighet och genomträngningsförmåga; en ökad spänning ställer sig endast fördelaktig i det fall, att det rör sig om objekt med större tjocklek. Bildens kontrast beror nämligen i huvudsak på att elektronerna sprides olika i objektpunkter med olika »masstjocklek», varmed här menas produkten av täthet och tjocklek. Ju större »masstjocklek» desto större antal »spridda» elektroner, som ej når fram till den geometriskt motsvarande bildpunkten. Kontrasten kommer därjämte att stegras av den kromatiska effekt, som uppkommer genom att elektronerna bromsas upp olika vid genomgång av objektdelar med varierande »masstjocklek», varigenom dessa uppbromsade elektroner ej förenas i en punkt på bildskärmen utan i punkter mer eller mindre långt från denna. På skärmen uppträder därför en spridningscirkel, vars diameter är stor jämfört med den bild ifrågavarande objekt upptar; på bildskärmen får bakgrunden därigenom en något större ljustäthet.

Fältelektronmikroskopet

Gränsen för elektronmikroskopets förmåga är sådan, att det endast kan lämna oss en svag antydan om strukturen hos vissa jättemolekyler. På den internationella kongressen för elektronmikroskopi i Paris 1950 uppvisades sålunda med ett modernt elektronmikroskop bilder av kemiskt definierade makromolekyler

av ämnet polystyrol med en molekylvikt av ungefär 500 000 som små diffusa punkter. Ett oerhört uppseende väckte därför en demonstration omedelbart efter ovannämnda, där det s. k. fältelektronmikroskopet demonstrerades av sin upphovsman dr Erwin Müller, Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem. Med detta instrument kunde Müller visa *strukturen* av en ftalocyaninmolekyl med molekylvikten 514 men inte endast på instrumentets lysskärm, bildens kontrast var så god att densamma kunde projiceras på den vita väggen; molekylerna (och värmerörelsen hos dessa) kunde härigenom uppfattas i hela aulan. I ett senare analogt försök visades bilder av enstaka bariumatomer.

Fältelektronmikroskopet[1] skiljer sig i princip från det vanliga elektronmikroskopet i följande avseenden:

1. Som elektronkälla användes en fin halvklotformad spets av volfram (eller vissa andra metaller) med en krökningsradie av 1000 till 2000 Å; elektronemissionen kommer till stånd genom en utomordentligt hög elektrisk fältstyrka vid spetsen (således ej termisk elektronemission som vid det vanliga elektronmikroskopet utan s. k. fältemission, därav namnet fältelektronmikroskop).

2. Som objekt tjänstgör den elektronemitterande spetsen (eller spetsens yta) eller i förekommande fall adsorberade atomer eller molekyler på dennas yta (således inte elektrongenomstrålade objekt i egentlig mening som vid det sedvanliga elektronmikroskopet).

3. Inga fokuserande elektrostatiska eller magnetiska linser finnes, utan elektronstråleriktningen bestämmes av fältfördelningen vid spetsens yta; härigenom har man på ett radikalt sätt undvikit svårigheterna med linsfelen.

Fältelektronmikroskopets konstruktion, som i princip är mycket enkel, framgår av fig. 1. I den högevakuerade glasbehållaren (*G*) befinner sig i mitten den elektronemitterande volframspetsen, katoden (*K*), vars närmare utformning framgår av detaljfigur. Katoden kan, som figuren visar, glödgas för urgasning och rengöring av ytan från adsorberade molekyler. På insidan av den delvis sfäriskt formade glasballongen befinner sig fluorescensbeläggningen (*L*). Som anod tjänstgör inte blott trådspiralen *A* utan även en ledande (osynlig) beläggning på glaskolvens insida. Anoden (*A*) är utformad med en liten spiral, innehållande barium, som genom uppvärmning av spiralen förångas och till en del utfälles på katoden.

Metoden att åstadkomma en elektronoptisk avbildning av en katod utan att använda linser och vars elektronemission beror på

[1] Tillverkas av E. Leybold's Nachfolger, Köln.

ett starkt elektriskt fält är inte ny. Redan för ca 20 år sedan gjordes försök med katoden utformad som en fin rak tråd och med en koaxialt placerad cylindrisk lysskärm som anod; de radiellt utflygande elektronerna avbildade katoden på lysskärmen, där förstoringen i trådens riktning är 1 och vinkelrät däremot lika med förhållandet mellan radien i lysskärmen och i katodtråden.

I det nu aktuella fältelektronmikroskopet, vars princip angavs av Müller redan 1936, har elektrodsystemet fått en annan utformning. *Katoden* består, som redan nämnts, av en fin metallspets; en sådan kan framställas av volfram och molybden med utomordentlig finhet genom etsning i smält natriumnitrit. Ett vanligt mikroskop ger inga upplysningar om metallspetsens finare struk-

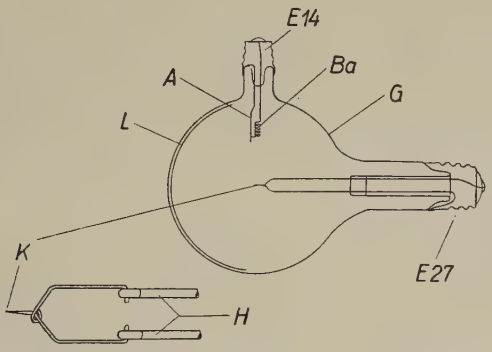


Fig. 1. Fältelektronmikroskopet med bariumförråd.

tur; dess krökningsradie motsvarar ungefär upplösningsförmågan. I ett vanligt elektronmikroskop däremot framträder bilden av spetsen som en sfärisk kalott. Då spetsen utgöres av en en-kristall av volfram, kunde man med tanke på kristallstrukturen väntat sig en mera skarpkantad profil. Spetsen glödgas emellertid alltid (för rengöring), innan det elektriska fältet (högspänningen) påkopplas, och vid den då rådande höga temperaturen kan det rörliga ytskiktet på spetsen i viss mån jämföras med en vätskeyta (hinna), där på grund av ytspänningen och den lilla krökningsradien kapillärtrycket blir avsevärt. En överslagsberäkning med ytspänningen 100 dyn/cm och en radie om 2000 Å ger ett kapillärtryck om ca 10 kp/cm²; denna siffra är jämförbar med draghållfastheten i massivt volframgitter vid temperaturen 3000° K. Den sfäriska formen är således med hänsyn till kravet på lägsta potentiella energien den normala. Lysskärmen, *anoden*, har sfärisk form med en radie av 5 cm.

Elektronemissionen

För den elektriska fältstyrkan, K V/m, på avståndet x m från centrum av en laddad sfär med radien x_0 m och spänningen U_0 V gäller:

$$K = U_0 \cdot \frac{x_0}{x^2} \text{ och på sfärens yta } K_0 = \frac{U_0}{x_0}$$

Om x_0 antages vara 1μ och spänningen 10^4 V, skulle fältstyrkan enligt formeln uppgå till 10^{10} V/m. Förutsättningen för att en fältstyrka av denna storleksordning skulle kunna upprätthållas är, att ingen form av urladdning äger rum (inget utbyte av laddade partiklar mellan spetsen och omgivande medium). Genom ett högt vakum, 10^{-7} torr, förhindras varje form av självständig urladdning. Men redan vid en fältstyrka av omkring 10^9 V/m uppträder ett annat fenomen; den kraft, som vid detta fält påverkar en elektron på spetsens yta, uppgår till $1{,}6 \cdot 10^{-10}$ newton och är tillräcklig för att utan uppvärmning frigöra elektroner (ledningselektroner) från metallspetsen (fältemission). En tillräcklig elektronemission erhålles av ett fält om 2 till $4 \cdot 10^9$ V/m, och den härför erforderliga spänningen kan man få exempelvis med hjälp av en influensmaskin eller liten bandgenerator.

Elektronutträdet ur metallen är emellertid en process, som med ovan angiven fältstyrka ej kan förklaras med den klassiska fysikens uppfattningar. (Enligt denna skulle en mer än 10 gånger större fältstyrka vara erforderlig.) Förloppet, som är ett typiskt exempel på det från vågmekaniken kända fenomenet tunneleffekt, behandlas här i korthet; samtidigt erhålles en förklaring till fältelektronmikroskopets goda kontrast.

En elektron, som befinner sig på avståndet x (någon eller några Å) från metallspetsen, befinner sig i ett fält sammansatt av två komponenter: 1. fältet som beror av spänningen mellan anod och katod, 2. fältet som beror på den i metallen uppträdande influensladdningen, belägen lika långt inne i metallen som elektronen utanför och av samma storlek som elektronladdningen (»bildkraftfältet»). För att förenkla problemet antager vi katodytan vara plan (i viss mån berättigat, då potentialfördelningen endast studeras i omedelbar närhet av katoden).

Bildkraftfältets potentialfunktion U_b är

$$U_b = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{4x}$$

där e=elektronladdningen i As, $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ $\frac{As}{V \cdot m}$.

För x mellan 0 och 1,5 Å antages dock ett lineärt potentialförlopp, så att U_b för $x=0$ motsvarar översta energinivån för metallens ledningselektroner.

Potentialförloppet U_a för spänningen mellan anod och katod är $U_a=-K\cdot x$. Det resulterande fältets potentialförlopp blir således

$$U=U_a+U_b$$

och framgår av fig. 2. Till vänster i figuren är de mot ledningselektronernas energinivåer svarande potentialerna angivna. De heldragna kurvorna U_b och U svarar mot en elektrisk fältstyrka om

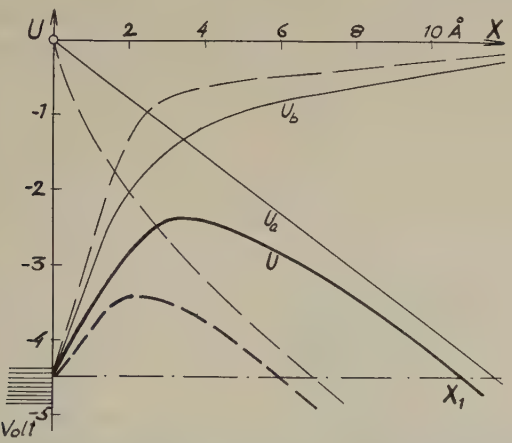


Fig. 2. Potentialfördelningen framför en fältkatod. De heldragna kurvorna motsvarar den plana katodytan, de streckade den plana ytan med en absorberad bariumatom.

$4\cdot 10^9$ V/m. En ökning av fältstyrkan medför en sänkning av potentialbarriärens topp, dvs. en reducering av utträdesarbetet.

Med de antaganden om potentialfördelningen, som här gjorts, skulle inga elektroner kunna frigöras från metallspetsen enligt klassisk uppfattning. Problemet gestaltar sig dock annorlunda sett ur vågmekanisk synpunkt: för elektronvågorna, vars våglängd vid metallutträdet uppgår till några Å, föreligger en viss sannolikhet (D) att tränga genom potentialbarriären (tunneleffekt); för ljuset föreligger ett parallellfall: totalreflexionens partiella upphävande, då skikttjockleken hos det totalreflekterande mediet endast uppgår till några ljusvågslängder. För elektronens sannolikhet (D) att passera igenom potentialbarriären, den s. k. transmissionskoefficienten, gäller

$$D=e^{-2\pi\sqrt{8m/h}\cdot\int_0^{x_1}(W(x)-W)^{\frac{1}{2}}dx}$$

där m är elektronmassan, h Plancks konstant, $W(x)$ elektronens potentiella energi ($U \cdot e$) och W den kinetiska (före utträdet ur metallen); integrationen skall utsträckas från metallytan över det x-intervall där ($W(x) - W$) är positiv, från $x=0$ till $x=x_1$. Formelmässigt förklaras således en ökning av fältemissionen genom ökat fält av att integralens värde blir mindre (ej i första hand på att maximivärdet i potentialkurvan sänkes). Med en fältstyrka av $4 \cdot 10^9$ V/m och ett utträdesarbete av 4 elektronvolt uppgår x_1 till 10 Å; med ökad elektrisk fältstyrka sjunker x_1. Elektronströmmen från katoden kan uppgå till 10^{-4} A, motsvarande en strömtäthet av upp till 10^6 A/cm². Med ökad fältstyrka kan strömtätheten stegras upp till 10^8 A/cm² från vissa områden av kristallen. Det elektronemitterande området omfattar ungefär 10^4 atomer.

Förstoring, kontrast och upplösning

Elektroner emitteras sålunda radiellt från den sfäriskt formade katodspetsen och träffar den ävenledes sfäriskt formade lysskärmen, i vars centrum katoden befinner sig. Radien (r) i katodspetsen uppgår till mellan 0,1 och 0,2 μ och radien i lysskärmen till 5 cm. Elektroner som emitteras från två punkter på avståndet d på katodytan träffar lysskärmen i två punkter på avståndet D. Den lineära förstoringen (G) är förhållandet mellan D och d, vilket i sin tur är lika med förhållandet mellan radierna dvs. $G=D/d=R/r$. Fältelektronmikroskopet ger således en förstoring, som kan uppgå till $5 \cdot 10^5$ (den största förstoring som hittills uppnåtts är 10^6). Detta betyder, att ett avstånd om 1 mm på lysskärmen motsvaras av 20 Å på katodspetsen, ett avstånd av atomära dimensioner; bariumatomens diameter beräknas sålunda till ca 4 Å och ftalocyaninmolekylens till väl 10 Å.

Möjligheten att på lysskärmen iakttaga bilder av objekt på katodspetsen av atomära dimensioner är emellertid inte enbart beroende av den tillräckligt höga förstoringen, som här föreligger; lika viktigt är, att kontrasten på lysskärmen och upplösningsförmågan är tillfredsställande.

Uttrycket för transmissionskoefficienten ger vid handen, att om fältfördelningen i någon punkt på katodens yta ändras genom att någon atom eller molekyl adsorberas på densamma, så följer härav också en annan emission från detta område. Man kan tänka sig, att en sådan partikel medför en lokal spetsverkan med starkt stegrad fältstyrka (de streckade kurvorna i fig. 2).

Om transmissionskoefficienten sättes till 1 för den helt plana ytan, så stiger densamma till ca 650 över en på ytan placerad sfär med radien 4,35 Å (motsvarande en bariumatom); på grund av en

samtidigt inträdande spridning av elektronbanorna (fig. 9) erhålles på lysskärmen en ökning av strömtätheten endast i förhållandet 1 till 30. Denna beräknade kontrastverkan stämmer uppskattningsvis med den experimentellt iakttagna.

Vad slutligen upplösningsförmågan beträffar, beräknas densamma uppgå till ca 10 Å. De elektroner, som utgår från en punkt på katoden, kan nämligen även erhålla en hastighetskomponent i tangentiell riktning (dock mycket liten), vilket medför, att den konjugerade bildpunkten på lysskärmen får formen av en spridningscirkel med en radie av ungefär 1 mm vid den sedvanligen förekommande förstoringen.

Upplösningsförmågan överstiger således ej det vanliga elektronmikroskopets; däremot är kontrastverkan vid fältelektronmikroskopet avsevärt mycket större och bestämd av helt andra faktorer än vid elektronmikroskopet.

Volframspetsens bild

Fig. 3 visar bilden av en volframspets; detta utseende erhålles emellertid endast om spetsen omedelbart före försöket upphettats till glödgning, så att densamma frigjorts från adsorberade atomer och molekyler. Man skulle möjligen vänta sig ett annat utseende av den rena spetsens bild, i första hand en likformigt belyst yta på lysskärmen. Utseendet förklaras av att spetsen består av en en-kristall med bestämd orientering; de mörkare punkterna eller partierna motsvaras uppenbarligen av riktningar inom kristallen, där elektronemissionen är mindre, i sin tur sammanhängande med ett något större utträdesarbete i dessa riktningar (eller, korrektare, från plan vinkelräta mot dessa riktningar).

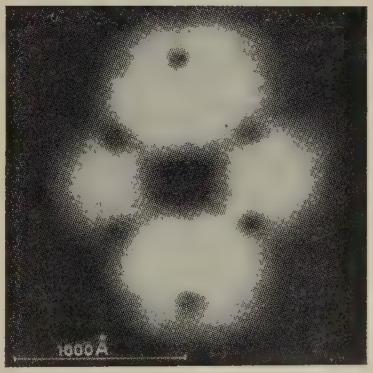


Fig. 3. Bild av den rena volframenkristallspetsen.

Undersöker man volframspetsen utan att först glödga densamma, således direkt efter etsningen, finner man en bild av annat utseende. Bilden, som även nu har viss symmetri, utgöres väsentligen av en del ljusa streck, motsvarande kristallkanter med mera framträdande elektronemission; någon avrundning av spetsen

har då inte ägt rum. Först efter glödgning får bilden det i fig. 3 angivna utseendet; nu erfordras dock en något högre spänning, sedan de fältförstärkande kanterna försvunnit efter avrundningen.

En tolkning av bilden fordrar en viss insikt i volframkristallens byggnad. Gittret är kubiskt-rymd-centrerat med en gitterkonstant av 3,155 Å. Fig. 4 framställer en elementarcell av denna kristalltyp. Ett plan i kristallen karakteriseras av de s. k. Millerska indexen (angivna av Grassmann). Varje plan avskär 3 sträckor på de 3

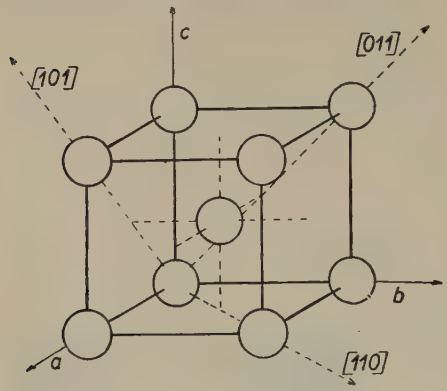


Fig. 4. Elementarcell i volframgittret.

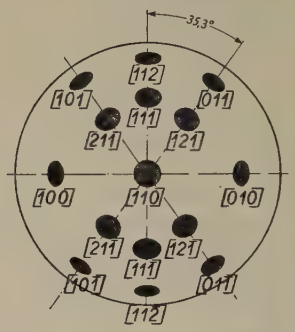


Fig. 5. Volframgittrets kristallriktningar på lysskärmen.

riktningarna [a, b, c]; planet bestämmes av de inverterade värdena av dessa avskärmningar, multiplicerad med en faktor, så att heltal erhålles (de Millerska indexen). Ett plan, som exempelvis avskär sträckorna a, $2a$ och $3a$ på respektive axlar, karakteriseras sålunda av talen [6 3 2]. Riktningen [632] är normalriktning till detta plan. Endast plan, där indexen är relativt små tal, spelar en mera avsevärd roll; plan, där indexen (ett eller flera) är stora, innehåller nämligen få gitterpunkter och saknar därför ur fysikalisk synpunkt intresse. I fig. 4 är en del riktningar indicerade enligt ovan angivna metod. Fig. 5 anger i parallellprojektion volframspetsens kristallriktningar på lysskärmen. I fig. 3 identifierar man med lätthet riktningarna [110] i centrum, lodrät över och under denna riktningarna [100] och [010] samt på ömse sidor riktningarna [211] och [121]. Vidare konstaterar man med hänsyn till kontrasten i bilden, att utträdesarbetet är förhållandevis stort i riktningen [110] (från planet [110]), en mörk yta i omgivningen av denna riktning; i riktningen [310] däremot, belägen mellan [100] och [211] är detsamma förhållandevis litet, svarande mot det ljusare fältet. För

en volframenkristall föreligger bestämningar av utträdesarbete för planet [211] och [310]; för det förstnämnda planet värdet 4,50 eV och för det senare 4,35 eV. Med fältemissionens (transmissionkoefficientens) starka beroende av utträdesarbetet är denna differens tillräcklig för att förklara elektronemissionens variation i olika riktningar. För åtskilliga kristallografiska undersökningar är fältelektronmikroskopet av utomordentligt värde.

Bilder av atomer och molekyler adsorberade på katodytan

Bariumatomer kan bringas över till katodspetsen genom uppvärmning av glödspiralen i anoden (innehållande barium). Bilden på lysskärmen förändras kraftigt, fig. 6. Förklaringen till att bilden ändrar karaktär ligger dels i att utträdesarbetet ändras i de punkter, där bariumatomerna slagit sig ner, och dels i fältändringen vid metallspetsen i dessa punkter, fig. 2. Redan ett monoatomärt skikt ändrar utträdesarbetet avsevärt. Till en början iakttages, hur vissa punkter på lysskärmen blixtrar till kraftigt, vilket förorsakas av enskilda bariumatomers nedslag; vid en något högre temperatur på spiralen med bariumförrådet ger bilden på lysskärmen ett intryck av livligt »snöfall»; ett större antal bariumatomer fångas upp av katoden. Man finner, att bariumatomerna (om endast en ringa mängd tillföres katoden) företrädesvis slår sig ned på vissa platser av kristallen, vilket sammanhänger med fältfördelningen på kristallytan. Ökas temperaturen på *katodspetsen* genom uppvärmning, iakttages bariumatomernas temperaturrörelse, i första hand kring riktningarna [011] och [110]. Vid ytterligare temperaturstegring blir rörelsen livligare, och så småningom försvinner bariumatomerna kring dessa riktningar, samtidigt som värmerörelsen iakttages kring övriga riktningar; så småningom återstår endast bariumatomer i vissa karakteristiska punkter, där de frigöres först efter en glödgning av spetsen (vid så hög temperatur kan man emellertid ej längre ha kvar det starka elektriska fältet med hänsyn till spetsens hållfasthet).

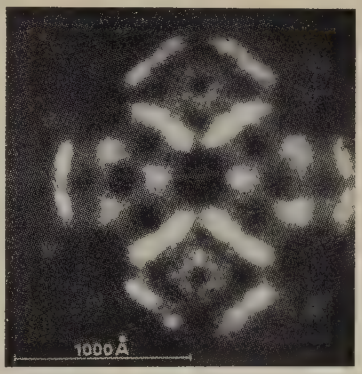


Fig. 6. Bild av volframspetsen sedan bariumatomer adsorberats på densamma. Den grovkorniga strukturen framkallas av bariumatomerna.

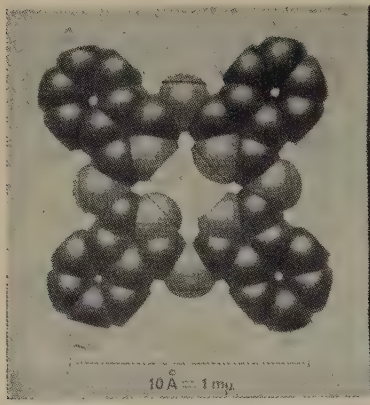


Fig. 7. Molekyl av ftalocyanin uppbygd av atomkalotter.

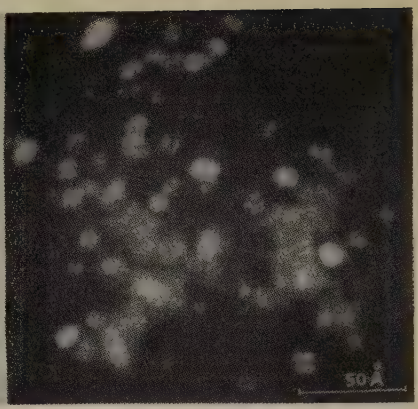


Fig. 8. Bild av volframspetsen sedan ftalocyninmolekyler adsorberats.

Ett annat intressant försök, vars resultat styrker antagandet om den sfäriska formen på spetsen, består i att förånga barium från anoden utan att samtidigt anlägga något fält mellan anoden och katodspetsen. Sedan en något större mängd barium under dessa förhållanden överförts till den sida av katoden, som vetter mot anoden, anlägges ett fält; bilden på lysskärmen påminner om den från sidan solbelysta månen: ett starkt lysande fält (det bariumbelagda området på katoden, reducerat utträdesarbete) och ett nästan helt mörkt, skilda åt av en ganska skarp gräns, som antyder en sfäriskt formad yta hos katoden; en uppvärmning av katoden med pålagt fält medför en utbredning av det bariumbetäckta området så småningom till hela katodspetsen.

Fältelektronmikroskopet erbjuder även en möjlighet att studera molekylstrukturen hos vissa organiska föreningar. Härvid förfar man ungefär på samma sätt som vid studiet av barium. Det ämne, vars molekylstruktur skall undersökas, befinner sig i ett ansatsrör till fältelektronmikroskopet, och genom en svag upphettning av detta rör med en liten gaslåga förångas en del av ämnet, och några molekyler slår sig ner på katodspetsen. En förutsättning för undersökningen är bl. a., att ifrågavarande ämnes molekyler utan sönderdelning tål den temperatur, som erfordras för att genom förstoffning överföra detsamma på katodspetsen. Bland föreningar, som lämpa sig för en dylik undersökning, är färgämnet ftalocyanin, vars molekyl består av 4 bensol- och 4 pyrrolringar, samtliga i samma plan. Fig. 7 visar ftalocyaninmolekylen, uppbyggd med s. k. atomkalotter. Denna struktur har fastställts efter en

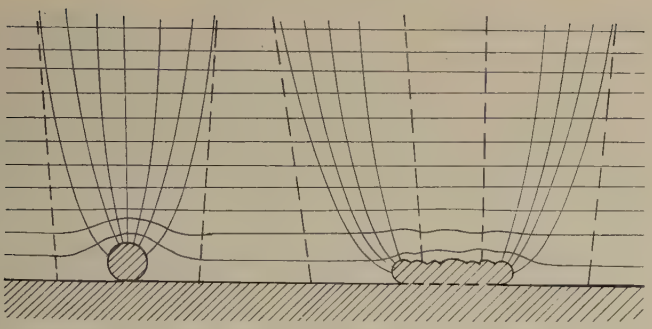


Fig. 9. Elektronbanor (ekvipotentiallinjer) framför fältkatoden, där en atom resp. molekyl adsorberats.

omfattande röntgen-fourier-analys. Fig. 8 visar lysskärmens utseende, sedan en del sådana molekyler slagit sig ner på katodspetsen. Bilderna på skärmen påminner om ett fyrbladigt klöverblad; bilden bekräftar, i varje fall kvalitativt, riktigheten av den beräknade molekylstrukturen. Om katodspetsen svagt upphettas, iakttages även här en del intressanta fenomen: värmerörelsen, snabba vridningar kring symmetriaxeln, plötsliga vridningar kring en riktning i molekylens plan, så att molekylen ställer sig på en kant, m. m. Ökad temperatur resulterar i molekylsönderfall.

Vid ett närmare studium av lysskärmen konstateras, att bilderna av ftalocyaninmolekylerna är av ganska varierande storlek; därjämte frapperas man av att detaljer i bilden framträder (klöverbladformiga utseenden). Avståndet mellan bensolringarnas centra uppgår nämligen endast till 7,7 Å, och upplösningsförmågan har tidigare uppskattats till högst 10 Å. Båda fenomenen får emellertid sin förklaring, om man något närmare studerar de adsorberade atomernas eller molekylernas deformerande inverkan på fältfördelningen vid katodspetsen. Fig. 9 visar elektronbanorna (fältriktningen) jämte ekvipotentialytorna (linjer) framför en plan yta, på vilken befinner sig dels en atom och dels en molekyl; bilden kan anses vara representativ för katodförhållandena, där spetsens krökningsradie är ungefär 100 gånger större än ftalocyaninmolekylen (ca 10 Å). Elektronbanorna blir något divergenta omedelbart intill det adsorberade objektet, varför bilden av exempelvis bariumatomen (0,5—0,8 mm) blir ca 4 gånger större än vad som skulle väntas med hänsyn till den tidigare angivna förstoringen. Finstrukturen i molekylbilden (kontrasten *inom* bilden) betingas därjämte av att elektronemissionen är särdeles stark från områdena kring

molekylens hörn på grund av den ökning av fältstyrkan (spetsverkan), som här uppträder. Den varierande bildstorleken slutligen kan förklaras av att vissa molekyler ej slår sig ned på den rena volframspetsen utan ovanpå redan adsorberade andra atomer, varigenom stråldivergensen ytterligare accentueras (ökad spetsverkan). Här föreligger ett exempel på det ganska egendomliga förhållandet, att mätobjektet ökar mätinstrumentets så väl upplösning som förstoring. Å andra sidan bör det emellertid understrykas, att likformigheten mellan bild och objekt blir diskutabel, när objektstorleken närmar sig gränsen för upplösningen; sålunda torde man i föreliggande fall i första hand kunna fastslå den kvadratiska formen på molekylen.

Trots de ganska epokgörande resultat som fältelektronmikroskopet redan lämnat, så föreligger dock redan nu, främst tack vare Müllers arbeten, en ny variant, det s. k. fält-ion-mikroskopet. Det är i första hand kravet på en stegrad upplösning, som varit vägledande i denna utveckling. Som redan tidigare nämnts, begränsas fältelektronmikroskopets upplösning av att elektronerna även erhåller en tangentialhastighet, oberoende av radialhastigheten (därjämte inverkar i mindre grad elektronvågornas böjning). En reducering av tangentialhastighetens inverkan på upplösningen skulle kunna uppnås genom en ökad radialhastighet; men en ökning av fältet, som utgör förutsättningen härför, medför även en starkt stegrad strömtäthet (ökad fältemission), och härigenom sättes en gräns för att på detta sätt nå ökad upplösning.

En väsentligt ökad upplösning erhålles först om elektroner ersättes med positiva ioner med mindre såväl de Broglie-våglängd som termisk tangentialhastighet. Genom ompolning av mikroskopet och ökning av fältstyrkan till ca $10 \cdot 10^9$ V/m frigöres de adsorberade bariumatomerna (eller andra adsorberade atomer), s. k. fältdesorption, såsom positiva ioner och rör sig rätlinigt mot lysskärmen och alstrar där bilder av de tidigare adsorptionsställena på metallspetsen. En förutsättning för att få en tillräckligt ljusstark bild på lysskärmen är, att en snabb upprepning av såväl adsorptionen som desorptionen äger rum. Denna process inträder emellertid automatiskt; så snart en molekyl (atom) adsorberats, avlämnar den en elektron till underlaget vid en lämplig fältstyrka, frigöres som positiv ion och accelereras mot lysskärmen. Antalet adsorberade molekyler är vida större än vad en gaskinetisk beräkning ger vid handen, därför att i det starkt inhomogena fältet vid spetsen polariseras förbiflygande molekyler och dras som dipoler in mot densamma. På detta sätt torde man kunna räkna med en 20 gånger skenbart förstorad infångningsyta.

På lysskärmen uppskattas bilddiametern med hjälp av lupp till mellan 0,1 och 0,2 mm (vid fältelektronmikroskopet till 0,5—0,8 mm) motsvarande en upplösning av mellan 2 och 4 Å, och härigenom får man en mycket skarpare, mera detaljrik bild av spetsen. Med fältionmikroskopet kan man således avbilda det atomära gittret med en upplösning som är större än gitterkonstanten.

Det »klassiska» elektronmikroskopet kommer självfallet att bibehålla sin ytterligt viktiga uppgift i forskningens tjänst, men för vissa undersökningar har fältmikroskopet, detta nya, oerhört mycket enklare instrument, sitt alldeles specialla värde och företräde. Vad som därjämte i detta sammanhang förtjänar särskilt understrykas, är den viktiga roll detta nya instrument bör få i den moderna undervisningen. Nu först kan man med enkla och lättförklarliga medel ge en inblick i materiens innersta struktur: kristallstrukturen, adsorptionen, värmerörelsen, tunneleffekten, bilder av enskilda atomer och molekyler m. m. Ur pedagogisk synpunkt är det dessutom en stor fördel, att åtskilliga av de mycket viktiga principer, på vilka fältelektronmikroskopet bygger, kan åskådliggöras var för sig i en serie enkla modellförsök; här nämnes i korthet endast bildkraftfältet, tunneleffekten, det elektriska fältets fördelning kring en liten sfär placerad intill en plan yta m. m.

Det är en ganska sällsynt företeelse, att ett instrument redan från början kan träda i såväl den avancerade forskningens som den elementära undervisningens tjänst, som fallet är just med fältelektronmikroskopet.

Litteratur

W. Schottky, Über kalte und warme Elektronenentladungen. Z. f. Physik *14* (1923) 63.

L. Nordheim, Die Theorie der Elektronenemission der Metalle. Phys. ZS *30* (1929) 177.

A. Sommerfeld u. H. Bethe, Handbuch d. Physik XXIV/2 441.

F. Ashworth, Field emission microscopy. Advances in electronics III (1951).

E. W. Müller. Die Abhängigkeit der Feldelektronenemission von der Austrittsarbeit. Z. f. Physik *102* (1936) 734.

— Elektronenmikroskopische Beobachtungen von Feldkatoden. Z. f. Physik *106* (1937) 541.

— Weitere Beobachtungen mit dem Feldelektronenmikroskop. Z. f. Physik *108* (1938) 668.

— Oberflächenwanderung von Wolfram auf dem eigenen Kristallgitter. Z. f. Physik *126* (1949) 642.

— Atome und Moleküle werden sichtbar, Umschau *50* (1950) 761.

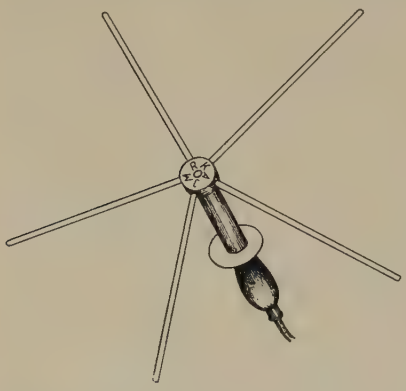
— Die Sichtbarmachung einzelner Atome und Moleküle im Feldelektronenmikroskop. Z. f. Naturforschung *5 a* (1950) 473.

— Das Feldionenmikroskop. Z. f. Physik *131* (1951) 136.

Metallers värmeledningsförmåga

Av fil. mag. Erik Tegeman, Eskilstuna

Med dessa rader vill jag fästa uppmärksamheten på en apparat konstruerad av lektor Gustav Nyman, Eskilstuna, och saluförd av Norstedts skolavd., Stockholm. Med dess hjälp kan man snabbt och elegant påvisa och jämföra värmeledningsförmågan hos koppar, aluminium, mässing, järn och ett rostfritt material. Stavar av dessa metaller (längd 200 mm, diam. 5 mm), bestrukna med värmefärg äro radiellt (se fig.) infästa i ett gemensamt centrumstycke, som uppvärmes elektriskt med hjälp av en lödkolv. Apparaten inkopplas, och uppvärmningen får fortgå, till dess att värmefärgen på stavarna närmast intill centrumstycket börjar övergå från gult till rödbrunt. Detta tar en tid av 2 à 3 min. Man bör akta sig för att värma för mycket, ty då kan värmefärgen skadas.



Efter frånkopplingen ledes värmet från det uppvärmda centrumstycket, och man kan lätt följa hur det sprides i de olika stavarna. Kopparstaven, som leder bäst, blir rödbrun till hela sin längd efter 6 à 7 min. Intressant och lärorikt är att se, att av de fem metallerna det rostfria materialet har den lägsta värmeledningsförmågan.

Stavarna äro speciellt preparerade, så att värmefärgen ej reagerar med dem. Det bör påpekas, att i stället för centrumstycket med stavarna kan insättas den till lödkolven hörande kopparspetsen, varefter kolven kan användas för lödning. En särskild kolv för apparaten behöver därför ej reserveras.

Lösningar till uppg. 1 och 6 i specialkurs, mars 1952

Uppgifternas lydelser återfinnas på sid. 148 i detta häfte.

1) I en cirkel C inskrives en rektangel och i denna den ellips E, vars axlar äro parallella med rektangelsidorna. Orten för skärningspunkten mellan två mot varandra vinkelräta tangenter till E är just C. Ellipsen E tangerar därför sidorna i den i C inskrivna

kvadrat, vars diagonaler äro symmetriaxlar i E. Genom projektion på ett plan genom den ena diagonalen erhålles satsen. *S. B.*

6) Om linjen $y=kx+l$ skär kurvan i punkter med abskissorna x_1, x_2 och x_3, så är (enl. sambanden mellan rötter och koefficienter) $x_1x_2x_3=-c$. I fallet $k=0$ tillkommer $x_1+x_2+x_3=-a$. Om x_1 är inflexionspunktens (I) abskissa, x_2 minimipunktens (M) samt x_3 abskissan för den punkt (T), där tangenten i M skär kurvan, så är $x_1^3=-c$, $x_2^2x_3=-c$, $2x_2+x_3=-a$ samt enl. lydelsen $x_1=-x_2$. Härav fås $x_1=x_3$, dvs. $I\equiv T$ samt $x_1=a$, som ger $a^3+c=0$. *X.*

Bokanmälningar

V. Thébault, *Les récréations mathématiques (parmi les nombres curieux).* Gauthier-Villars, Paris 1951, VI+297 p., 2500 fr.

Urgammalt är människors mer eller mindre lekbetonade sysslande med matematiska uppgifter (det må gälla tal, figurer eller annat), som genom slående, lättillgänglig formulering, elegant lösningsmetod, överraskande resultat, stort, till spel inbjudande antal möjligheter m. m. utöva en fantasieggande lockelse även på personer, som ej önska eller kunna tränga in i krävande teorier. En sådan uppgift är »curieux» på franska. Även matematiker av facket (Euler t. ex.) ha satt högt värde på problem av detta slag, som emellanåt kunnat leda till fördjupade studier av verklig betydelse.

V. Thébault, som är väl känd sedan många år som en osedvanligt produktiv medarbetare inom triangel- och tetraedergeometri i ett flertal matematiska tidskrifter, började redan för 40 år sedan intressera sig även för aritmetiska uppgifter av »kuriös» karaktär i ovanstående mening. Med aldrig sinande uppfinningsförmåga har han under årens lopp på olika håll publicerat uppsatser och kortare meddelanden inom detta område jämte ett stort antal teorem och problem avsedda att lösas av läsekretsen.

De mest »intagande» resultaten av detta arbete ha nu samlats i föreliggande bok, till brädden fylld med intressant material. Fullständiga bevis (av förf. själv eller ibland av andra) omväxla med kortare anvisningar; 100 blandade problem utgöra ett särskilt kapitel för läsaren att »rekreera» sig med. Framställningen är fransk i sin klarhet och röjer en erfaren undervisare; metoden är elementär. Det rör sig om hela tal och deras delbarhetsegenskaper,

heltalslösningar till ekv. m. m. Kongruensbeteckning användes ej, Fermats lilla sats anlitas sporadiskt, det som behövs angående den s. k. Pellska ekv. behandlas i ett tillägg av A. Buquet. Beträffande ett par diofantiska ekvationer av högre grad hänvisas till källorna. Som den geometriker författaren är kommer han även in på »aritmotrianglar», dvs. trianglar där vissa mätetal äro hela tal. I ett andra tillägg av A. Buquet göres en systematisk sammanställning av vissa hithörande satser.

En väsentlig utökning av stoffet har V. Thébault ernått genom att i stor utsträckning betrakta talsystem med andra baser än 10 och bl. a. undersöka hur sifferbeståndet beror av basen. Till hjälp härvidlag finnas utförliga tabeller. Endast ett exempel: *Om basen är 2, 4, 10 eller 12, måste varje 2- eller flersiffrig jämn kvadrat innehålla åtminstone 1 jämn siffra; i alla andra talsystem finnas sådana kvadrater, som skrivas med endast udda siffror.*

Mycket intressanta resultat ha ernåtts beträffande tal av formerna a a b b, a b b a, a b a b i allmänna talsystem (då bokstäverna utom enstaka siffror även kunna betyda siffergrupper) — och mycket mer, omöjligt att här uppräkna. Den som ej vet att 3, 5, 7 (tre successiva udda tal, som äro primtal) är ett unicum (1 är ej primtal!) eller att en aritmetisk serie med differensen 30 och idel primtalstermer (t. ex. 7, 37, ...) aldrig har mer än 6 termer, kan på 10 effektiva rader läsa ett bevis för en allmän primtalssats (av V. Thébault) av vilken de nyssnämnda äro enkla specialfall.

Härmed är icke sagt att allt är så enkelt i detta arbete; där finnes användning för uthållig eftertanke och tålmodig diskussion också, men det lönar sig. Boken rekommenderas varmt åt alla vänner av elementär talteori. Dess studium länder icke blott till nöje utan även till nytta. *Josef Andersson*

G. Hoheisel, *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.* Zweite umgearb. Auflage. Sammlung Göschen Bd 1059. W. de Gruyter & Co. Berlin 1952. 124 S., DM 2,40.

I denna nya upplaga av exempelsamlingen till Hoheisels böcker om ordinära och partiella differentialekvationer (Samml. Göschen 920 och 1003) har inga större förändringar vidtagits. Den innehåller för de ordinära ekvationerna sammanfattningar av teorin i ett antal paragrafer, var och en innehållande några exempel. Därefter följer 132 blandade uppgifter. Sista kapitlet omfattar 30 ex. inom de partiella ekvationernas teori. Till samtliga uppgifter ges svar, till de flesta även lösningar. *Tord Ganelius*

II. Gask, *Ordinära differentialekvationer.* Lunds matematiska sällskaps kompendier nr 3. Lund 1951, 35 s., kr. 8:—.

I serien Lunds matematiska sällskaps kompendier har utgivits en ny bok om differentialekvationer, som tydligen är avsedd att ersätta ett tidigare verk i samma serie, som bl. a. under lång tid använts vid våra universitet och högskolor. Den mest påfallande förändringen i den nya boken är att förf. trots det lilla formatet lyckats få med bevis för existensen av lösningar till de behandlade ekvationerna. Det som mönstrats ut är närmast redogörelser för mer speciella klasser av ekvationer, som kan lösas genom lämpliga konstgrepp (Bernoulli etc.).

Efter en trevlig introduktion, som ger definitioner och förklaringar på de begrepp som behöves i fortsättningen, och som dessutom innehåller några plausibilitetsbetraktelser över lösningars existens, behandlas i kapitel 1 av första ordningens ekvationer de lineära (med integrerande faktor) och de separabla. I kapitel 2 ges lösningsmetoder för lineära ekvationer av högre ordning med konstanta koefficienter. Termen »variation av konstanten» undvikes, och en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen bestämmes med hjälp av en integralansats, som innehåller en speciell partikulärlösning till den homogena ekvationen. Därefter följer i det sista kapitlet ett bevis för existensen och entydigheten av en lösning till en första ordningens ekvation byggt på successiva approximationer och Lipschitz-villkor. För att bli tillämpbart på de behandlade ekvationerna av högre ordning generaliseras sedan detta bevis till system av ekvationer. Boken avslutas med 34 övningsexempel med svar.

Framställningen är i allmänhet klar, och för att se hur en strängare behandling kan öka elegansen och underlätta förståelsen, kan man jämföra motsvarande partier om separabla ekvationer och lineära homogena ekvationer i de båda böckerna från samma förlag. I det tredje kapitlet kan det dock ifrågasättas om ej framställningsformen blivit väl kortfattad. En stor del av de läsare, som författaren kan tänkas vända sig till, måste ju vara rätt ovana vid de begrepp, som här kommer till användning. Enligt anmälarens uppfattning skulle även en något utförligare diskussion av innebörden av ordet lösning i förhållande till de svårigheter av algebraisk och integrationsteknisk art, som kan möta vid dennas framställning, varit önskvärd på ett tidigt stadium i boken. (Som det nu är, ges ej alltid i faciten lösningar, som svarar mot den i introduktionen givna definitionen.)

Boken är lättläst, men språket behandlas kanske väl nonchalant: som en kuriositet kan nämnas att författaren till den grad delar

riksdagens tvekan mellan verbens singular- och pluralformer, att han många gånger hinner använda båda i samma mening!

För högskoleundervisningen synes bokens obestridliga förtjänster göra den väl lämpad, men den kan även rekommenderas var och en som vill lära eller repetera elementerna av differentialekvationsteorin, sedda ur en strängare synpunkt än vad som är vanligt i böcker av motsvarande omfång. *Tord Ganelius*

Egil Hylleraas, *Matematisk og teoretisk fysikk*. II. Mekanikk og statistikk. Grøndahl & Søns Forlag, Oslo 1951. XII+297 s., nkr. 23: 45.

I Hylleraas' teoretiska fysik föreligger nu andra delen (del III och I anm. i Elementa *33*, 198 och *34*, 52). Först en kort blick på innehållet. Bokens första tredjedel ger en visserligen kortfattad men kanske just därför översiktlig och klar framställning av den klassiska mekaniken, med tyngdpunkten lagd på allmänna principer och metoder. Lagranges och Hamiltons formalism ägnas härvid ett förhållandevis stort utrymme. Som tillämpningar följa därpå avsnitt om stela kroppars dynamik, elasticitetsteori och hydrodynamik. Man lägger bl. a. märke till att elasticitetskoefficienter införas i anslutning till den potentiella energien (förutom på vanligt sätt via ytkrafter). Sista tredjedelen upptages av termodynamik — konventionell behandling byggd på cykliska processer etc. — samt av kinetisk gasteori och statistisk mekanik, den senare presenterad i såväl Boltzmanns som Gibbs' form. Också kvantstatistik med vissa användningar har beretts plats.

Arbetet är knappast avsett att utgöra någon uttömmande lärobok, och förf. har heller inte strävat efter att pressa in mesta möjliga material inom det utrymme som stått till buds. I stället har han valt ut vad han ansett väsentligt och behandlat detta mera utförligt. Även om framställningen ändå ibland måste bli ganska knapphändig, får läsaren på så sätt en bättre inblick i de matematiska metoder som komma till användning, och uppläggningen måste betraktas som lyckad. Ett ytterligare plus är Hylleraas' klara och lättflytande stil, som bidrar till att öka nöjet av läsningen. Även denna del kan alltså varmt rekommenderas.

För att också säga något mera negativt, kan man nog tycka att en kritiker på jakt efter tryckfel eller inkonsekvenser i formlerna beretts kanske oförtjänt många glädjestunder. Talangivelserna för ett par naturkonstanter (h, N) vill man likaså gärna delvis tyda som utslag av tryckfelsnisses verksamhet, och slutligen uppges på sid. 282 fotonspinnet till $^1/_2$ i st. f. 1. *S. Bertil Nilsson*

Paul Levy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle.* Coll. de monographes sur la théorie des fonctions. Seconde éd. des Leçons d'Analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, Paris 1951, 484 p.

Boken skiljer sig föga från första upplagan (1922) och behandlar med föråldrade metoder en del primitiva problemställningar av typen: vad händer med Greens formel, då dimensionsantalet växer över alla gränser? Det är dessa konkreta problem som går igen i den nya titeln, som blivit nödvändig sedan de sista fyrtio årens utveckling gjort den gamla missvisande. I ett tillägg skriver F. Pellegrino om L. Fantappiès teori för analytiska funktionaler, vilken som specialfall innehåller bland annat Heaviside-kalkylen.

Lars Gårding

Maurice Roy, *Mécanique des milieux continus et déformables.* Gauthier-Villars, Paris 1950. T. I 366 p., 2800 fr., T. II 338 p., 2300 fr.

Utgående från termodynamikens grundlagar söker Roy i detta arbete ge en sammanfattande exposé över kontinuerliga mediers mekanik, dvs. elasticitetsteori och hydromekanik. Redan i förordet meddelas, att verket ej bör betraktas som en monografi utan fastmer som en lättillgänglig översikt för en läsekrets med huvudsakligen teknisk inriktning.

De två volymerna innehålla vardera två avsnitt. I del I behandlas deformerbara kroppars kinematik, dynamik och termodynamik. I två kapitel behandlas speciellt elastiska kroppar respektive vätskor. Denna del är liksom för övrigt hela verket ur pedagogisk synpunkt väl planerad, men anmälaren kan icke underlåta att göra några anmärkningar. Elasticitetsteorien är den klassiska, som blott behandlar små deformationer. Härigenom förlorar man delvis den klara överblicken på det gemensamma i elastiska kroppars och vätskors mekanik, men författaren har måhända begränsat sig på grund av rent formella svårigheter. Nästan genomgående utskrivas nämligen alla vektorekvationer i komponentform i sin fulla längd, och med enstaka undantag avstår författaren från att använda metodiken från vektorkalkylen eller — vilket här borde vara lämpligast — Ricci-kalkylen. Om Riccikalkylen använts, hade det varit möjligt att deducera de elasticitetsteoretiska resultaten utan begränsningar av deformationernas storlek, och det hade varit möjligt att medtaga forskningsresultat under de sista trettio åren. På sid. 92 gör Roy ett förhastat påstående. Anledningen till att man inom teorien för viskösa vätskor postulerar lineära samband mellan

spänningstensorns och deformationshastighetstensorns komponenter skulle vara, att de senare äro små och relationerna skulle blott vara en första approximation. Nu äro emellertid ifrågavarande komponenter ej dimensionslösa, och man kan genom val av en tillräckligt stor tidsenhet få dem godtyckligt stora. Antagandet är en generalisering av en hypotes, som uppställdes redan av Newton.

I del II behandlas utförligt lineär elasticitetsteori, och del III innehåller en mycket elegant framställning av hydromekaniken, där författaren på 172 sidor från grunden härleder de hydrodynamiska ekvationerna i Eulers och Lagranges form, diskuterar Helmholtz' satser och d'Alamberts paradox för att sedan övergå till mer avancerade och moderna problemställningar såsom Prandtl's vingteori, supersonisk strömning och spänningstensorer vid turbulent strömning. Del IV behandlar hydrauliska problem vid konstruktion av maskiner, speciellt förbränningsmaskiner och turbiner.

Detta arbete bör enligt anmälarens uppfattning ej läsas som en lärobok, utan läsaren bör helst vara förtrogen med berörda områden och begagna detta verk för att konsolidera ett redan befintligt kunskapsstoff. Om de två böckerna även kompletterats med referenser till annan litteratur, skulle de ha blivit utmärkta uppslagsböcker. *Bengt Andersson*

Phase Transformations in Solids. Symposium held at Cornell University, August 23—26, 1948. Editorial Committee: R. Smoluchowski, J. E. Mayer and W. A. Weyl. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall Ltd. London 1951, 660 pp. $ 9.50.

Vid det symposium, vars resultat sammanställts i ovannämnda bok, hade sammanförts specialister från flera skilda områden av vetenskaplig och teknisk forskning (fysik, kemi, metallurgi och keramisk forskning), vilka som gemensamt intresse hade det fasta tillståndets fysik.

Följande tema behandlas i boken: 1) Allmänna teorin för fasomvandlingar (L. Tisza), 2) En allmän metod för studiet av ofullständiga kristaller och fasomvandlingar (J. E. Mayer), 3) Kristallisationen som ett fenomen av samverkan (J. G. Kirkwood), 4) Fundamentala drag hos diffusionen i fasta kroppar (F. Seitz), 5) Teorin för kärnbildning vid kristallisation (R. Smoluchowski), 6) Kristallografiska synpunkter på fasomvandlingar (M. J. Buerger), 7) Övergången fast-flytande i argon (O. K. Rice), 8) Omvandlingar i silver-halogener (M. L. Huggins), 9), 10) Omvandlingar i enkomponent- resp. flerkomponetsilikatsystem (F. C. Kracek resp. J. F. Schairer), 11) Omvandlingar hos glas (W. A. Weyl), 12) Fasomvandlingar i ferroelektrika (B. Matthias). (Anm.: Ferroelektrika

utgöra med hänsyn till de dielektriska egenskaperna elektriska motsvarigheter till de ferromagnetiska ämnena), 13) Omvandlingar i rena metaller (C. S. Barrett), 14) Ordningsomvandlingar i metalliska legeringar (S. Siegel), 15) Utskiljning ur metalliska fasta lösningar (A. H. Geisler), 16) Den eutektoida reaktionen (R. T. Mehl och A. Dubé), 17) Martensitomvandlingen (M. Cohen).

Uppsatserna innehålla dels termodynamiska beräkningar, dels redogörelser för olika ämnens strukturegenskaper såsom dessa kunnat fastläggas med röntgen- och optiska mikrometoder. Mekanismen för vissa omvandlingar beskrives i anslutning till rymdgittermodeller och speciella deformationer av dessa. Dessutom återges resultat av termiska, elektriska och mekaniska mätningar såsom bestämningar av hårdhet och elektriskt motstånd.

En del av diskussionsinläggen till föredragen äro införda i boken, andra komma att publiceras separat.

Ett par tryckfel må påpekas. På sid. 188 står att järnets kristallgitter med temperaturen undergår omvandlingarna: ytcentrerat-rymdcentrerat-ytcentrerat (rätta lydelsen: rymdcentrerat-ytcentrerat-rymdcentrerat). På sid. 74 rad 8 skall i stället för entropi stå energi.

Bildmaterialet i boken, däribland många mikrofotografier, är av mycket hög klass liksom den typografiska uppställningen i sin helhet. Antalet litteraturreferenser är över 1300. — Anmälaren vill livligt rekommendera denna bok åt alla för det fasta tillståndets fysik intresserade. *J. O. Linde*

Fritz London, *Superfluids,* Volume I, Macroscopic Theory of Superconductivity (Structure of Matter Series). John Wiley & Sons, Inc. New York 1950 Pp. 161, $ 5.00.

I denna första volym av »Superfluids» behandlas de supraledande elektronerna, medan en andra del skall ägnas åt flytande helium och dess egenskaper under omvandlingspunkten 2,19° K.

Som titeln antyder, lägger författaren huvudvikten vid den teoretiska behandlingen. Boken är därför inte lämplig för den som vill studera den experimentella sidan av supraledning.

Boken är indelad i fem avsnitt.

I den första delen inför förf. begreppet »det rena supraledande tillståndet» och utvecklar därpå de för övergången normalledare-supraledare gällande termodynamiska relationer, som först härleddes av Gorter och Casimir i början av 30-talet.

Londons teori för det rena supraledande tillståndet, dvs. Maxwells ekvationer kompletterade med två av förf. och hans broder H. London 1935 uppställda tilläggsekvationer för en supraledare,

utvecklas i det andra avsnittet. Detta kapitel är enligt referentens mening det klaraste och njutbaraste i boken, då det består av rent matematiska deduktioner av en rad vackra satser för supraledare ur ett antal relativt enkla grundekvationer. Emellertid är det rena supraledande tillståndet i viss mån en idealisering, i de flesta experiment har man att göra med ett tillstånd, där normal- och supraledande områden alternera i materialet.

Detta s. k. »intermediate state» behandlas i tredje avsnittet. Teorien kan knappast anses ha blivit kvantitativt verifierad av experimenten.

I den fjärde delen införas de korrektioner av Gorter-Casimirs termodynamiska teori, som nödvändiggjorts av det ändliga inträngningsdjup hos magnetfält och supraström, som Londons teori leder till.

Londons teori är liksom Maxwells makroskopisk och går inte in på någon atomistisk motivering av de postulerade ekvationerna. I det sista avsnittet av sin bok uppställer London ett program för en supraledningens molekylarteori. En dylik på kvantmekaniken grundad teori, utan vilken supraledningen inte kan anses tillfredsställande förklarad, saknas fortfarande; ansatser ha under det senaste året publicerats av Fröhlich och Bardeen men ha ännu ej utarbetats så långt att man vågar yttra sig med bestämdhet om deras framgång. *Bengt Nagel*

Alva H. Bennett, Helen Jupnik, Harold Osterberg and Oscar W. Richards, *Phase Microscopy, Principles and Applications.* J. Wiley & Sons, Inc., New York 1951, 319 p., $ 7.50.

De flesta ledande mikroskoptillverkare framställa nu faskontrastmikroskop, och det finns mycket firmatryck om konstruktionerna. Tyvärr har nog ofta informationen inskränkt sig till att man talat om tekniken vid handhavandet och bredvid varann reproducerat samma bakteriekultur fotograferad utan och med faskontrast.

De amerikanska konstruktörer som skrivit denna första mera uttömmande bok om fasmikroskopens teori och användning äro anslutna till American Optical Company, och särskilt Osterberg är känd för sina nykonstruktioner, som bygga på polariserat ljus. Boken är utmärkt instruktiv, och, för att även nämna det som först gör intryck, utomordentligt vackert tryckt och illustrerad.

Den elementära teorin för faskontrast ges utförligt och utan att fordra förkunskaper i optik. Anmälaren skulle endast här ha önskat mera vektorrepresentation, som är överskådligare än de motsvarande analytiska beräkningarna.

Även den medicinare eller biolog, som skall använda fasmikroskopen med framgång, måste för att rätt tyda ett objekt känna till huvuddragen av hur faselementet skall väljas och varieras. En sådan kunskap ges här, och den konkretiseras av att de viktigaste klasserna av tillämpningar, även i fråga om industriell mikroskopering, behandlas. Aktuella konstruktioner från de olika firmorna redovisas.

Det sista avsnittet, insatt som Appendix, utgör ett intressant men svårtillgängligt originalbidrag till den avancerade teorin. Kännedom om denna är dock mycket viktig för att man skall kunna behärska så fundamentala ting som kontrastens variation inom ett relativt brett fasobjekt och i de »fransar» som konturera det. Här behandlas problemen med ansatser som likna dem i den Rayleighska teorin för mikroskopavbildningen. *Erik Ingelstam*

P. Fraüenfelder—P. Huber, *Einführung in die Physik*, I. Band, Mechanik, Hydromechanik, Thermodynamik. Reinhardt Verlag, Basel 1951, 492 S., Schw. fr. 18: 50.

Denna lärobok, vars första del nu föreligger, vänder sig enligt företalet närmast till sådana, som studera fysik vid universitet och tekniska högskolor. Förf:a avse att lämna en sammanfattande, systematisk framställning av fysikens grundläggande principer som ett komplement till undervisningen i experimentalfysik. Boken innehåller därför inga experiment- och apparatbeskrivningar, utan detta kunskapsstoff antas inhämtat på annat håll. För att göra boken tillgängligare förutsättes endast ett minimum av matematiska kunskaper, innefattande studentkunskaper i deriväträkning. I några med finstil tryckta avsnitt användes dessutom partiella derivator och elementär integralkalkyl. Även vektoralgebran utnyttjas, men den förutsättes ej bekant utan behandlas i ett inledande avsnitt.

En sådan inskränkning av de matematiska verktygen medför givetvis, att framställningen måste göras ganska beskrivande och bred. Den givna matematiska ramen hade emellertid på en del punkter kunnat tillåta större koncentration och stringens. Framställningen är dock på det hela taget klar och redig, förutsättningar och definitioner redovisas tydligt, och de viktiga lagarna framhäves på tillbörligt sätt. Förf:a ägnar också förtjänstfull omsorg åt enheter och dimensioner. De beskriva t. o. m., fast under klagan, det s. k. tekniska måttsystemet. Frågan är dock, om inte åtminstone den tekniska massenheten (=9,81 kg) borde begravas under generad tystnad. Kiloponden får man väl dras med ännu en tid.

Stoffurvalet i boken förefaller förnuftigt, och satserna åtföljas av många utförligt behandlade exempel. Lärogången är också väl vald, med ett beklagligt undantag: Vid behandlingen av entropin har förf:a förletts att använda Lewis och Randalls s. k. »standardsystem» (värmebad+fjäder), som bidragit till att förvirra de termodynamiska begreppen för så många kemister. Förf:a misslyckas också i det hopplösa företaget att göra detta pedagogiska missfoster livsdugligt.

Bokens typografi och illustrativa utstyrsel är god. Som sig bör i en schweizisk mekanikbok inledes den av ett porträtt av Daniel Bernoulli, vars förpliktande minne tydligen har inspirerat förf:a vid skrivandet av det utmärkta kapitlet om hydromekanik. Utan risk för vanvördnad mot fosterlandet kunde kanske det andra porträttet i boken, som också föreställer Bernoulli, ha utbytts mot en bild av t. ex. Newton. *Stig Hjalmars*

Reports on Progress in Physics, Vol. XIV. The Physical Society, London 1951, Pp. iv+412, 50 s. net.

Vol. 14 av Reports on Progress in Physics innehåller i ordning följande uppsatser (förf. inom parentes): Recent Advances in Ultra-Violet Absorption Spectroscopy (W. C. Price, London), Anomalous Fine Structure of Hydrogen and Singly Ionized Helium (Willis E. Lamb, Jr., New York), New Techniques in Optical Interferometry (H. Kuhn, Oxford), The Diffraction Theory of Aberrations (E. Wolf, Cambridge), The Spectrum of the Airglow and the Aurora (A. B. Meinel, Chicago), The Microphysics of Clouds (B. J. Mason och F. H. Ludlam, London), Angular Correlations in Nuclear Reactions (Martin Deutsch, M. I. T.), The Nuclear Interactions of Cosmic Rays (G. D. Rochester och W. G. V. Rosser, Manchester), Nuclear Effects in Atomic Spectra (E. W. Foster, London), A Critical Survey of Ionospheric Temperatures (N. C. Gerson, Cambridge, USA), Some Applications of Nuclear Physics in Medicine (W. V. Mayneord, London).

Uppsatserna äro alla av mycket hög klass (jfr presentationen av serien i Elementa *34*, 234, 1951). En utförlig anmälan skulle vara motiverad men kan av utrymmeshänsyn inte komma i fråga. Emellertid vill rec. fästa den allmänintresserade fysikerns uppmärksamhet på särskilt den monografi, som behandlar nyare undersökningar inom »molnfysiken». Verksamheten på detta gamla forskningsfält har under senare år starkt intensifierats som en följd av strävandena att finna metoder för artificiell nederbördskontroll. Vad som hittills uppnåtts är av stort fysikaliskt intresse. Man har anledning räkna med att det fortsatta arbetet inom en

inte allt för avlägsen framtid kommer att leda till resultat med enorma konsekvenser, bl. a. för livsmedelsproduktionen; det är rent av tänkbart, att människan kan uppnå ett sådant herravälde över väderleken, att det blir möjligt att förhindra fortsatt expansion av jordens ökenområden. *Torsten Jönsson*

Y. Rocard, *Electricité*, Masson et Cie, Paris 1951, 538 p., 2200 fr.

Denna lärobok bygger på föreläsningar vid Sorbonne åren 1941—42 och innehåller en framställning av den klassiska elektromagnetiska teorien och dess experimentella underlag jämte tekniska användningar i väl avvägd blandning.

Kapitelrubrikerna lyda i ordning: elektrostatik, magnetism, elektrokinetik (Ohms, Joules och Kirchhoffs lagar), elektrodynamik (elektromagnetismen), växelström, vågutbredning och strålning, den fria elektronen, elektrolys samt enheter. Lärogången är den traditionella; Coulombs lag, även för magnetfält, intar en fundamental plats. En följd härav — som dock ej är ofrånkomlig — är tyvärr att även virrvarret ifråga om enhets- och definitionssystem är det traditionella. Författaren synes icke ha tagit några som helst intryck av de senare årens intensiva diskussion i detta ämne. Även om konservatismen i Frankrike är stor på denna punkt, och även om man ingalunda ensidigt behöver engagera sig för exempelvis Giorgisystemet, så torde varje student nu och inom överskådlig framtid vara betjänt av, icke att undgå men väl att lära sig behärska elektricitetslärans enhetsförbistring. Den diskussion som författaren i slutkapitlet ägnar dessa frågor är föga uttömmande.

Av anförda grunder måste även en konservativt inställd recensent beteckna den pedagogiska framställningen — i vad avser dess mera teoretiska sida — såsom i viss mån föråldrad. Ifråga om bokens experimentella och tekniska sida finnes däremot ingen plats för en sådan anmärkning. Här äro alla krav på aktualitet uppfyllda, både ifråga om urval och behandling. Särskilt må nämnas en förträfflig beskrivning av vågledare samt det omfångsrika kapitlet över elektronik. Mättekniken är utförligt behandlad. Överallt i texten finnas dessutom inströdda historiska och tekniska notiser av belysande eller pittoresk natur (icke ens den elektriska stolen saknas såsom en makaber illustration av begreppet ledningsmotstånd!). Arbetet blir härigenom lättläst och roande, vilket i synnerhet för en lärobok är värt en del, från strängt saklig synpunkt onödigt, textutrymme.

Figurerna äro talrika och i allmänhet ändamålsenliga, tryckfelen äro icke särskilt många samt ett alfabetiskt register till-

finnandes. Någon sammanfattning av vektorräkningens grunder finnes ej, utan dennas satser omnämnas vid användandet.

Även om boken icke torde ha utsikt att bli något standardverk vid svenska universitetsstudier har den sitt värde genom sin innehållsrikedom och författarens stilistiska förmåga. Man må beklaga de påtalade bristerna, utan vilka boken skulle ha kommit i klass med den bästa existerande litteraturen i ämnet.

Lennart Huldt

William Wilson, *A Hundred Years of Physics*. Duckworth, London 1950. Pp. 320, 21 s. net.

Som titeln antyder, ger denna bok en framställning av fysikens utveckling under de senaste hundra åren, närmare bestämt sedan början av drottning Victorias regering. Enligt författaren, som är professor emeritus i fysik vid Londons universitet, behöver läsaren endast mycket små förkunskaper i fysik för att kunna förstå boken. Emellertid är jag inte säker på att exempelvis en nybliven realstudent skulle ha så stort utbyte av att studera den. Boken är ingen lärobok och kan på sitt begränsade utrymme inte ge någon detaljerad redogörelse för de fysikaliska upptäckterna och teorierna. Experimentbeskrivningarna äro kortfattade och figurerna schematiska.

En läsare, som från utförligare läroböcker redan känner till de flesta av de saker, som boken handlar om, har emellertid stor behållning av densamma. Den ger på ett utomordentligt klart och redigt sätt en samlad redogörelse för de många fysikaliska fenomen, som upptäckts under de senaste hundra åren, och för de teorier (termodynamiken, Maxwells elektromagnetiska teori, Plancks kvant-teori, Einsteins relativitetsteori, kvantmekaniken, för att nämna några av de viktigaste), med vars hjälp man på grundval av de gjorda upptäckterna uppbyggt den moderna fysikaliska vetenskapen.

En fysiklärare har både glädje och nytta av att läsa boken.

Karl Sjögren

J. D. Bernal, *The Physical Basis of Life*. Routledge and Kegan Paul, London 1951, Pp. 80, 6 s. net.

I sin utförliga referensförteckning anger förf. flera föregångare, bl. a. T. H. Huxley, vilka sedan länge behandlat samma problem. Men egentligen är det först på sista tiden frågan om livets uppkomst blivit ett centralproblem ej endast inom biologien utan även för fysiker och kemister, vilka numera anser sig kunna lämna väsentliga bidrag till detta studium. Detta gäller i första hand

livets förutsättningar, vilka i flera hänseenden var olika de betingelser under vilka livsprocesserna för närvarande arbetar.

Förf. tecknar i snabba drag en bild av den sterila världen före livets uppkomst. Då jordytan svalnat så att vattenångan i atmosfären kunde kondensera, omgavs jorden huvudsakligen av kvävgas, varigenom ultravioletta fotosynteser ända ned till 2000 Å kunde producera de första organiska föreningarna ur de oorganiska salterna i dåtidens hav. Något direkt svar på frågan om livets uppkomst ges icke, förf. tar t. o. m. avstånd från att definiera begreppet liv, men han ansluter sig till Haldanes beskrivning av livet såsom en oavbruten, av sig själv fortsättande följd av kemiska reaktioner, eller närmare bestämt: »The basic chemical problem of all vital transformation is the achievement of chemical changes in an isothermal medium, by which large amounts of energy can be made use of in the small steps which alone are permissible in such a system.» Härigenom införes kvantfysikaliska synpunkter på biologiska processer, i synnerhet sådana, som är knutna till de system av enzymer, vilka deltager i alla livsviktiga reaktioner. Förf. är av den åsikten att kvantfysiken är den mest effektiva nya idéen i modern biologi.

Genom ständigt fortlöpande fotosynteser, främst kolsyreassimilationen i de gröna växterna, erhåller livet sitt energibehov ur solstrålningen. Genom denna syntes har även jordatmosfären erhållit sitt syreförråd, varigenom livet har kunnat utvecklas till allt högre former. — Förf. har många synpunkter på denna utveckling, och hans bok utgör en i hög grad stimulerande läsning.

B. Grundström

William Wilson, *The Microphysical World.* Home Study Books. Methuen & Co., London 1951, Pp. 216, 5 s. net.

Prof. emeritus W. Wilson vid Londons universitet har skrivit en populär bok om de små tingen i naturen. Boken är avsedd för den breda publiken. Var och en som försöker sig på en populärframställning av naturvetenskapliga frågor råkar in i ett nästan olösligt dilemma; utan att få förutsätta att läsaren besitter någon egentlig kunskap om elementära naturvetenskapliga fakta måste förf. ge läsaren ett intryck av att läsaren förstår det väsentliga i de delar av den moderna naturvetenskap, som behandlas. Det är ganska rörande att se hur den gamle professorn försöker klara problemet. Varje kapitel börjar ytterst försiktigt och lättfattligt. I stället för algebraiska uttryck och ekvationer, ty sådant anses som bekant inte gångbart i en populär framställning, inför han ett slags ekvationer, där siffror och symboler ersättes med ord. På så

sätt kan man nå en viss gräns, men vad händer sedan? Jo, då införes helt stillsamt och utan förklaringar en rad präktiga formler, skrivna enl. gängse matematiska metoder, välkända för alla fysiker och obegripliga för allmänheten.

Härmed vill rec. ej säga, att boken är dålig, den är tvärtom utomordentligt välskriven och innehållsrik och hör utan tvekan till det bästa, som presterats på området i fråga. Förf. har tagit som huvuduppgift att visa hur de egenskaper, som vi tillskriver atomer och molekyler, har utvecklats från de första vaga hypoteserna fram till de moderna föreställningarna. Bokens innehåll är i stort sett grupperat i tre huvudområden: kinetisk gasteori, spektroskopi i vidsträckt bemärkelse samt kärnfysik. I frågan om ljusets natur ansluter sig förf. till åsikten om att ljuset är korpuskulärt, det existerar icke några ljusvågor i fysikalisk mening utan endast sannolikhetsvågor. Han hyser även den uppfattningen, att bakom de statistiska lagar, som vi använda vid tolkningen av den mikroskopiska världen, döljer sig en fysikalisk värld, styrd av kausallagar. Av särskilt värde är de talrikt förekommande personhistoriska upplysningarna, där förf. ger oss en god överblick av de inre linjerna i fysikens utveckling. *B. Grundström*

O. Lindstad, *Veiledning i skoleforsøk i mekanikk og elektrisitetslære.* Norsk Lektorlags faglig-pedagogiske skrifter nr 3, Oslo 1951. Stenciltryck, 91 sid., nkr. 5: —.

Arbetet är avsett som ett komplement till samme författares bok »Arbeidsmåten i fysikk og kjemi i den høgre skolen», vilken tidigare anmälts i denna tidskrift (årg. 34, 1951, s. 121). Bokens båda huvudavsnitt inledas med utförliga sammanställningar av de olika enkla mätredskap och apparater, som måste finnas i en skolas fysikaliska instrumentsamling för att en nöjaktig experimentell undervisning skall kunna bedrivas. Arbetet innehåller dessutom noggranna beskrivningar till ett flertal experiment speciellt sådana som äro kortfattat behandlade i de vanliga läroböckerna eller enligt författarens mening kunna utföras bättre på annat än i dessa angivet sätt. Särskild vikt lägges på de tekniska detaljerna.

Flera av de intressanta och instruktiva försöken ur elläran såsom mätning av elektriska laddningar med (ballistisk) galvanometer ävensom vissa växelströmsförsök falla dock utanför det pensum, som normalt medhinnes i vårt svenska realgymnasium. En stor del av mekanikkapitlet upptager kvantitativa experiment ur rörelseläran, ett område, som hos oss tyvärr alltför ofta måste bli ganska styvmoderligt behandlat på grund av den knappt tillmätta tiden i gymnasiets högsta ring.

Ehuru lektor Lindstads bok givetvis i första hand tar sikte på förhållandena i den norska skolan, innehåller den mycket av allmänt fysikaliskt intresse och kan säkerligen bli till god nytta som handledning vid den experimentella fysikundervisningen även i svenska skolor. *Osvald Lundquist*

Fred Hoyle, *Världsalltets byggnad.* Övers. Bonniers, Stockholm 1951, 120 s., kr. 7:50.

Det är flykt och en strålande idérikedom över Fred Hoyles beskrivning av världsaltets byggnad. Man rycks med av författarens framställningskonst och faller lätt tillföga för de många djärva teorier som serveras.

Man får först taga del av den traditionella framställningen av planetsystemet. Energistrålningen från solen behandlas utförligt. Den inifrån kommande strålningen ändrar sin karaktär på vägen ut mot solens yttre skikt. I det inre består den av mycket kortvågig strålning, röntgenstrålning, för att sedan då den lämnar solen övergå till huvudsakligen ljus strålning av ofarlig karaktär.

Solen är en tämligen ung stjärna och består av cirka 90 % väte. Allteftersom detta väte förvandlas till helium kommer solen att bli varmare och varmare. Väteförrådet kommer att räcka i 50 milliarder år, men dessförinnan kommer solen att svälla upp, så att den når ända ut till den nuvarande mars-banan.

Sol och stjärnor har en gång uppstått ur en väldig roterande gasmassa. En del moln i denna har dragit till sig mer och mer materia och övergår slutligen i stjärnor. När dessa stjärnor skrider fram genom den tunna gasen i världsrymden, drar de till sig materia, och vägarna som stjärnorna vandrar fram utmärkes av tunnlar i den interstellära materien. Ju långsammare en stjärna rör sig, dess mer materia hinner den draga till sig, och ju bredare blir tunneln.

Med hjälp av dessa av stjärnorna bildade tunnlar i rymden ger författaren även en förklaring till den talrika förekomsten av dubbelstjärnor, och slutligen får vi veta att även solen haft en dubbelstjärna och att det är denna numera i rymden utslungade stjärna som lämnat efter sig planeterna. På grund härav kan författaren ge en förklaring till materiens olika sammansättning på solen och på jorden.

I hela framställningen spelar den tunna materien i världsrymden den dominerande rollen. Det är den som så småningom ger upphov till stjärnorna och slutligen även till stjärnsystemen. Ur denna materia har även kometerna bildats, och den har också

givit upphov till de kraterliknande bildningarna på månen, allt enligt författaren.

Hoyle uttalar sina teorier med en ganska enastående självsäkerhet, och läsaren kan ibland få den felaktiga uppfattningen att vad som anföres är fastslagna sanningar som icke fordrar någon ytterligare diskussion. Vad som är Hoyles egna vetenskapliga resultat och vad som är andras har man icke så lätt att avgöra.

Boken är fängslande och översättningen mycket god. Men läsaren måste varnas för att taga allt vad författaren skriver för gott.

C.-G. Danver

P. Thornhill, *Luften vi andas* (75 s.); B. och M. Holmes, *Vattnet vi använder* (84 s.) och *Hur man håller värmen* (85 s.); F. R. Elwell, *Ljuset och vår syn* (76 s.). Natur och Kultur, Stockholm 1951.

Dessa fyra små bokhäften ingår i serien Kunskap och Liv, utgiven av Natur och Kultur. Varje häfte kostar 3 kr., vilket är billigt. Översättningarna förefaller vara bra. Svårt att bedöma naturligtvis, då man icke sett originalen. Innehållet avser fysikämnets primärstadier. Formler och regler förekommer nästan icke alls. Framställningen är livlig och oftast lättfattlig. De föreslagna försöken kan nästan alltid utföras med sådan enkel materiel, som brukar finnas till hands hemma eller i skolan. T. ex. två termosflaskor med termometer och bomullspropp i varje. Ena flaskan är tom. Den andra beskickas med levande flugor. Av obekant anledning rekommenderas »spyflugor». Den flugiga flaskan visar småningom förhöjd temp. på grund av inre förbränning hos djuren.

I första och tredje häftena förekommer intressanta fysikaliska tillämpningar på blodomloppet samt på hjärtats och lungornas arbetssätt. Samtliga häften har breda marginaler, och i dessa frodas ett myller av schematiska figurer, (som kunde ha varit en smula elegantare). Idén är förträfflig. Jag hoppas få se den upptagen även i helsvenska läroböcker.

De tre första häftena förtjänar ett mycket gott betyg. Icke så nr 4. Här hade det varit önskvärt, att översättaren fungerat jämväl som bearbetare. »Röding och gädda går båda i vatten» lyder rubriken till åttonde kapitlet. I texten finner man följande uttalande: »Den där ramsan, som jag lärde för att komma i håg ordningen [av spektralfärgerna] var endast ett slöseri med tid.» — Men varför har förf. tagit med den då? »Mot djupet» heter ett slags novell, som med amerikanskt ståhej beskriver hur ett par pojkar studerar bottnens skenbara upplyftning i strömmande(!) vatten. Av de fyra bilderna till texten är de första tre värdelösa. Strax efteråt slarvas det med terminologien, i det att »böjning»

och »brytning» rörs ihop. Åtskilliga andra svagheter i framställningen beror på att förf. envisas med att skriva optik utan att använda vinkelbegreppet. Rättvisligen bör dock medgivas, att det finns flera bra partier även i denna fjärde del.

I första hand vill jag rekommendera häftena åt fysiklärarna i realskolor och folkskolor. För att där komma fram till ett gott resultat måste man hålla sig själv och klassen i ständig kontakt med vardagslivets fysik. Våra fyra små böcker ger läsaren både kunskaper och goda metodiska impulser. *Torgny Edqvist*

Brandstätter—Sternhagen, *Chemische Schulversuche.* Franz Deuticke, Wien 1950, 369 s., kr. 27:—.

Efter 40-årig framgångsrik verksamhet som kemilärare och outtröttlig experimentator utgav professor F. Brandstätter i Wien år 1922 en handbok i experimentalkemi, numera utgången ur bokhandeln. Hans medarbetare och efterträdare professor L. Sternhagen har nu publicerat boken i något omarbetad form, med tillägg av ett 50-tal nya experiment.

Arbetet behandlar skolkemiens alla områden i form av 432 demonstrationer, varav 73 i organisk kemi, samt illustreras av 284 bilder, och som de flesta experimenten framföras i flera varianter blir det för läraren en rikligt flödande källa att ösa ur. En del av experimenten äro avsedda som elevlaborationer, några av de övriga närma sig högskolenivå, och åtskilliga av dem ha åtminstone för undertecknad nyhetens behag. Alla vittna de om omsorgsfull planläggning och böra kunna väcka intresse hos eleverna, tack vare de tekniska finesserna, den överskådliga uppställningen av apparaturen och de påtagliga och stundom förbluffande resultaten.

En utmärkt bok för de kemiska institutionernas bibliotek och för de lärare som önska friska upp sin undervisning!

E. Nordefeldt

Paul Baud, *Traité chimie industrielle.* Quatrième éd. Tome I. Grande industrie chimique. Problème de l'eau, 868 p., 5000 fr. Tome II. Métalloïdes et métaux, 1056 p., 5800 fr. Tome III. Industries organiques, 1148 p., 6800 fr. Masson et Cie, Paris 1951.

Paul Bauds arbete behandlar på över 3000 tätt tryckta sidor i stort sett hela den kemiska tekniken. Flertalet kapitel är mycket ingående behandlade, vilket gör, att boken snarare bör betraktas som ett uppslagsverk än en lärobok, som kan sättas i händerna på den studerande ungdomen. Materialet disponeras efter den klassiska principen att varje industrigren behandlas för sig.

Att boken har en uppgift att fylla framgår av att den nu utkommer i sin fjärde upplaga. Verket är unikt såtillvida att en enda författare har behandlat hela området. När det gäller att bedöma vilka gammalmodigheter som bör utmönstras och vilka nyheter som är betydande, uppträder svårigheter, som inte kan bemästras av en enda person.

Den första frågan synes inte ha bekymrat författaren i högre grad. Apparattyper som inte funnits i drift under de senaste trettio åren, finnas medtagna. För den läsare, som tidigare studerat böcker, där sådant material avlägsnats, kan ett studium av boken ge en inblick i den historiska utvecklingen — en många gånger nyttig lärdom. Aktningsvärda försök har gjorts att få med nytt material. De figurer, som är av nyare datum, är i allmänhet mycket överskådliga och väl utförda.

Tonvikten ligger på förhållanden av betydelse för den franska industrien, och hänsyn tages i största utsträckning till konstruktioner och arbeten utförda av fransmän. Boken kan i Sverige endast väntas finna läsare bland sådana som särskilt är intresserade för den franska kemiska industrien, och för denna läsekrets kan begränsningen vara en fördel. Att en specialist som läser ett verk som detta finner felaktigheter, oväsentligheter och utelämnanden inom sitt eget område är naturligt. Detta har författaren talat om redan i förordet. *Olof Samuelson*

Alwin Mittasch, *Geschichte der Ammoniaksynthese.* Verlag Chemie 1951, 196 s., och 10 planscher. Pris bunden kr. 17: 80.

Ett halvt sekel av självupplevt deltagande i kväveindustriens utveckling är det som återspeglas i detta intressanta och inte endast ur historisk synpunkt lärorika arbete. Mittasch var anställd i Badische Anilin- und Soda-Fabrik och som sådan Carl Bosch's medarbetare vid den tekniska tillämpningen av Fritz Habers grundläggande undersökningar över ammoniakjämvikten. Ingen kan vara bättre skickad att skildra denna utveckling, vars mål för alla medarbetare var framställningen av kvävegödselmedel, men som de med beklagande sågo växlas över till framställning framför allt av explosivämnen för krigets behov. Men man får också en intressant exposé över ammoniaksyntesens äldre historia, den naiva, famlande och rent empiriska period, som går tillbaka ända till slutet av 1700-talet.

Det kan i detta sammanhang förtjäna framhållas, att varje försök att demonstrera ammoniaksyntesen genom att vid vanligt tryck leda kväve och väte över en järnhaltig katalysator (även föreslaget i undertecknads lärobok) ger ett alldeles illusoriskt resultat,

i den mån någon ammoniak kan påvisas. Dess bildning beror, som för länge sedan påvisats, dels på föroreningar i kvävgasen, dels på katalysatorernas halt av nitrid.

Först Habers fundamentala undersökning av jämvikten mellan väte, kväve och ammoniak gav de vetenskapliga förutsättningarna för en teknisk lösning av problemet. Att även denna erbjöd utomordentliga svårigheter är välbekant och får genom Mittasch sin utförliga dokumentering. *G. Starck*

Ph. Lötzbeyer, I. *Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf*, 40 S., DM 2,80. II. *Erläuterungen und Beispiele für den Gebrauch der vierstelligen Tafeln zum praktischen Rechnen*, 28 S., DM 3,60, Walter de Gruyter & Co. Berlin 1951.

Tabellen motsvarar i stort sett de i våra läroverk använda men innehåller även en formelsamling, vari bl. a. grundformlerna i differential- och integralkalkylen medtagits, samt nomogram för lösande av ekv. $x^n+ax+b=0$ för $n=2, 3$. Enligt förordet är det väsentligt nya i den föreliggande upplagan, att tabellerna lämna en praktiskt användbar och enkel lösning på frågan, hur man skall avgöra med vilken noggrannhet räkneresultaten erhållas. »Noggrannhetsmåttet», dvs. i princip det inverterade värdet av tabelldifferensen, angives i en särskild spalt i huvudtabellerna; noggrannare kan det utläsas på ett utviksblad, och det är även grafiskt framställt. Noggrannhetsproblemet diskuteras i ett särskilt kapitel. I »Erläuterungen» behandlas det utförligare, och i anslutning till de olika tabellerna genomräknas här i detalj numeriska exempel, och den erhållna noggrannheten diskuteras; vissa numeriska felaktigheter i framställningen ha observerats. Interpolationsproblemet berörs, och bl. a. härledes villkoret, för att lineär interpolation skall vara tillåten. — Tabellerna äro tryckta på ett svagt gulfärgat papper, vilket tillsammans med den i detaljer påhittigt genomarbetade typografien gör dem mycket lättlästa. En lärare som icke förut är insatt i noggrannhetsproblemet har åtskilligt att hämta ur de båda böckerna. *Nils Sjöberg*

Tore Lundberg, *Matematiska tabeller*, Gumperts förlag, Göteborg 1951, 172 s., kr. 7:50.

I förordet motiveras tabellverket med att det förutom sedvanligt »grundmaterial» även innehåller »en hel del tabeller, som man vanligtvis endast återfinner i större specialverk, men som äro av utomordentlig betydelse för alla dem, vilkas arbete på ett eller

annat sätt är matematiskt betonat». Av innehållet må här nämnas: För heltalen 1—999 angivas n^2 och n^3 samt med sju värdesiffror $\sqrt{n}$, $\sqrt{10n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$, $\sqrt[3]{100n}$ samt $1000/n$, πn och $\frac{1}{4}\cdot\pi n^2$. Femställiga logaritmer för 1000—10 000 och sjuställiga för 10 000—12 000 angivas. Trigonometriska funktioner äro tabellerade femställigt för varje bågminut liksom deras femställiga logaritmer. Naturliga logaritmer anföras för 1—1109. Funktonerna e^x, e^{-x}, $\sinh x$, $\cosh x$ $\operatorname{tgh} x$ liksom femställiga logaritmer för e^x, $\sinh x$ och $\cosh x$ givas för $0 \leq x \leq 10$. Logaritmerna för primtalen mindre än 1000 givas med tio decimaler. Tabeller finnas över $n!$, $1:n!$, $\log n!$ samt över binominalkoefficienter liksom över vissa räntetekniska storheter. Slutligen må nämnas tabeller över »sannolikhetsfunktioner» och »faktorer för beräkning av sannolikhetsfel» samt över de fullständiga elliptiska integralerna K och E för olika värden på parametern. — Tabellens format är litet (A 6), vilket gör den något svårläst, i den mån trycket är mindre kraftigt. Tabellen synes dock inte minst med hänsyn till det relativt låga priset kunna vara en värdefull tillgång för den, som önskar en tabell med det innehåll och den noggrannhet som denna har. *Nils Sjöberg*

Recensenter i detta häfte: docent B. Andersson, Stockholm; lektor J. Andersson, Vaxholm; lektor C.-G. Danver, Stockholm; lärov.adj. T. Edqvist, Malmö; fil. lic. T. Ganelius, Stockholm; lektor B. Grundström, Djursholm; prof. L. Gårding, Lund; docent S. Hjalmars, Stockholm; docent L. Huldt, Stockholm; docent E. Ingelstam, Stockholm; lektor T. Jönsson, Stockholm; laborator J. O. Linde, Stockholm; lektor O. Lundquist, Lund; civ.ing. B. Nagel, Stockholm; docent S. B. Nilsson, Lund; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; prof. O. Samuelson, Göteborg; lektor N. Sjöberg, Stockholm; lektor K. Sjögren, Göteborg; lektor G. Starck, Stockholm.

Gradualavhandlingar[1]

Hans Rådström, *Convexity and norm in topological groups.* (Arkiv för Matematik 2, nr 7, 99—137 (1952)). Disp. i Stockholm den 19 april 1952. Opponenter: lektor Svend Bundgaard och fil. lic. Olof Hanner.

Det är välbekant hur man kan addera två punkter a och b i ett lineärt rum (t. ex. det euklidiska planet) genom att uppfatta dem som ändpunkter av vektorer från origo och definiera summan

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$a+b$ genom den vanliga parallellogramkonstruktionen. Låt A och B vara givna punktmängder. Om a resp. b äro punkter, som genomlöpa mängderna A resp. B, så genomlöper summan $a+b$ en tredje mängd, som betecknas $A+B$.

Summan $A+A \ldots +A$ av n st. lika punktmängder betecknas A^n och kallas n:te digniteten av A. Med en enparametrig semigrupp av punktmängder menas en klass av punktmängder A_λ, som bero av en positiv reell parameter på ett sådant sätt, att $A_{\lambda_1}+A_{\lambda_2}=A_{\lambda_1+\lambda_2}$.

Avhandlingens tredje paragraf innehåller ett grundläggande resultat, nämligen en karakterisering av konvexa punktmängder i euklidiska rum av godtyckligt dimensionstal. Denna karakterisering sker helt med hjälp av de ovan beskrivna begreppsbildningarna. Man observerar att ingenstädes i dessa förekommer multiplikation av punkter (=vektorer) med skalärer; den enda operation som användes är addition av punkter. Detta förhållande är viktigt, eftersom det antyder möjligheten att teorien för konvexa punktmängder kan vara av betydelse även i sådana sammanhang, där endast *en* operation är definierad, i första hand i gruppteorien. Resten av avhandlingen ägnas åt undersökningar i denna riktning.

I § 1 diskuteras operationen $A \cdot B$, där A och B äro punktmängder i en topologisk grupp och där produkten definieras på ett sätt som är fullständigt analogt med den ovan givna definitionen av $A+B$ för punktmängder i ett euklidiskt rum. Speciellt undersökes under vilka omständigheter produkten $A \cdot B$ beror kontinuerligt av sina faktorer.

§ 2 ägnas åt att definiera och preliminärt diskutera begreppet enparametrig semigrupp av delmängder till en topologisk grupp. Det ges även en sats som i vissa fall gör det möjligt att uppdela en enparametrig semigrupp i enklare beståndsdelar.

I § 3 specialiseras den betraktade gruppen till att vara ett euklidiskt rum med addition som gruppoperation, och de ovannämnda resultaten bevisas.

Detta appliceras i § 4 på teorien för Liegrupper. Huvudresultatet i denna paragraf kan formuleras på följande sätt: Varje enparametrig semigrupp av kompakta delmängder till en Liegrupp genereras av en infinitesimal konvex mängd.

I § 5 studeras en speciell sorts enparametriga semigrupper, nämligen sådana vars mängder utgöra sfärer i en vänsterinvariant metrik. Icke alla vänsterinvarianta metriker sammanhänga med semigrupper på detta sätt. Om emellertid en given metrik har denna egenskap, benämnes avståndet från gruppens enhetselement till ett annat gruppelement detta elements norm, och gruppen säges vara normerad. Det bevisas att den motsvarande metriken i så fall

måste vara konvex i Mengers mening. Det visas att en komplett, normerad, topologisk grupp är sammanhängande och lokalt sammanhängande.

§ 6 ägnas åt problemet att topologiskt karakterisera de grupper som låta sig normeras. Detta problem löses fullständigt för kommutativa grupper och väsentligen också för kompakta grupper, dvs. i de fall där man har tillgång till struktursatser.

Sten Ahrland, *On the Complex Chemistry of the Uranyl Ion.* Acta Chem. Scand. 3 (1949) 374, 783, 1067; 5 (1951) 199, 1151, 1271 + sammanfattning, Lund 1952. Disp. i Lund $^{22}/_{3}$ 1952. Opponenter: docent Sture Fronaeus och fil. mag. Curt Karlsson.

Undersökningen avser en kvantitativ bestämning av jämviktskonstanterna för de komplex som uranyljonen, UO_2^{2+}, i vattenlösning ingår med ett antal olika ligander. Såväl potentiometriska som extinktiometriska mätningar har utförts. Genom att alla mätningar skett i ett saltmedium av konstant jonstyrka=1C (bortsett från de ändringar komplexbildningen förorsakar) anses aktivitetskoefficienterna kunna hållas konstanta. De beräknade konstanterna blir koncentrationskonstanter, gällande för det givna mediet (där $NaClO_4$ använts som utfyllnadssalt).

Då UO_2^{2+} hydrolyseras redan vid låga pH, kan man förutsätta att hydrolysen ofta influerar starkt på dess komplexjämvikter med andra ligander. Den närmaste uppgiften blir därför att kartlägga hydrolysförloppet. Detta visar sig vara särdeles komplicerat, i det flerkärniga komplex förekommer i ansenliga mängder redan vid låga uranylhalter. En fullständig kunskap om hydrolysen står därför ej att få, men man får ändå en så god bild av den, att det blir möjligt att rätt väl ange dess inflytande på de följande mätningarna.

Vid dessa har kloracetat-, tiocyanat-, acetat-, sulfat-, klorid-, bromid- och nitratsystemen undersökts, flertalet av dem både potentiometriskt och extinktiometriskt. I de fall där båda metoderna kunnat användas, har de givit överensstämmande resultat.

För de fyra förstnämnda systemen har de tre första enkärniga komplexen kunnat påvisas. I intet fall bildas fler än tre komplex, inte ens för det ojämförligt starkast komplexa systemet, acetatet. Tvärtom visar mätningarna här otvetydigt, att det tredje komplexet är mättat och ej inom åtkomliga ligandkoncentrationer förmår uppta någon ytterligare acetatjon. — De tre sistnämnda systemen har så svag komplexitet, att endast det första komplexet har kunnat påvisas. — I intet av de angivna systemen har något tecken till flerkärnig komplexbildning kunnat iakttagas, i stark motsats till vad som förut framkommit om de hydrolytiska reaktionernas förlopp.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1807) *I triangeln ABC är vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C och medianen mot AB lika stor som sidan BC. Att konstruera en dylik triangel, när längden av sidan AB är given.* *X.*

1808) *Det finnes 24 plan i en parallellepiped, som gå genom ett hörn och centra i två sidoytor, som ej innehålla hörnet i fråga. Hur stor del av parallellepipedens volym upptager det konvexa område kring dess centrum, som dessa 24 plan avgränsa?* *X.*

1809) *Punkterna (x; y; z), (x; z; y), (y; z; x), (z; y; x), (z; x; y), (y; x; z), där $x<y<z$, i ett rätvinkligt axelsystem utgöra hörnen till en sexhörning, som är inskriven i en cirkel. Beräkna sexhörningens yta.* *N. J.*

Enklare matematiska uppgifter[2]

1810) I två geometriska serier $t_1, t_2, t_3 \ldots$ och $T_1, T_2, T_3 \ldots$ är $t_n = T_\alpha$ och $t_n^2 = T_\beta$. Sök x i likheten $t_n^3 = T_x$. Möjlighetsvillkor?

Svar: $2\beta - \alpha$. $\beta > \alpha : 2$.

1811) Lös ekv. $1 + \sin x + \cos x + \cot x = 0$.

Svar: $135° + n \cdot 180°$, $270° + n \cdot 360°$.

1812) Två tangenter till parabeln $2y = 2 - x^2$ bilda med x-axeln en liksidig triangel. Beräkna dess yta.

Svar: $25\sqrt{3} : 12$ ytenheter.

1813) AB är diameter i en halvcirkel med radien r, P en punkt på bågen och Q dess projektion på tangenten i B. Bestäm minimivärdet av $(PA)^2 + (PQ)^2$.

Svar: $3r^2$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérg. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 1810, 1815—1819 äro insända av *B. Svenonius*, 1811—1814 av *S.B.*

1814) I triangeln ABC är $AB=BC=a$. Den inskrivna cirkeln tangerar AC i M och AB i N. Bestäm maximivärdet av ytan av triangeln AMN, när sidan AC varierar.

Svar: $a^2\sqrt{3}:9$.

1815) Parabeln $y=ax^2+bx+c$ skär x-axeln i två punkter. Visa, att om tangenterna till kurvan i dessa punkter äro vinkelräta mot varandra, så är $b^2-4ac=1$. Gäller omvändningen?

Svar: Ja ($a\neq 0$).

1816) Maximi- och minimipunkterna till kurvan $y=ax^4+bx^2$ ($a>0$, $b<0$) utgöra hörn i en triangel med ytan a ytenheter. Visa, att minimipunkterna, oavsett värdena på konstanterna a och b, ligga på var sin av två parallella linjer. Angiv deras ekvationer.

Svar: $x=\pm 1$.

1817) Var på x-axeln ser man cirklarna $x^2+y^2=4$ och $(x-10)^2+(y-5)^2=25$ under lika stora synvinklar?

Svar: Punkterna $(3\frac{1}{3};\ 0)$ och $(-7\frac{1}{7};\ 0)$.

1818) I cirkeln $x^2+y^2=r^2$ dragas flera parallella kordor. AB är en sådan korda och P en punkt på kordan eller dess förlängning. Sök orten för P, om $PA\cdot PB=a^2$, där a är en given sträcka.

Svar: $x^2+y^2=r^2\pm a^2$.

1819) Sträckan AB:s ändpunkter äro $A\,(a;\ 0)$ och $B\,(-a;\ 0)$ ($a>0$). Angiv orten för en punkt P så beskaffad, att $(PA)^2+(PB)^2=n\cdot(PQ)^2$, där Q är projektionen av P på x-axeln. Möjlighetsvillkor?

Svar: Hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$, om $b=a\sqrt{2:(n-2)}$, $e=\sqrt{n:2}$ och $n>2$.

1820) P är en rörlig punkt på linjen $x+y+b=0$ och N dess projektion på x-axeln. Q är en fast punkt på linjen $y=b$. Härled orten för tyngdpunkten till triangeln PQN och angiv särskilt Q:s läge och ortkurvans ekv. för det fall att denna går genom origo.

Svar: $Q\,(0, b)$; $x+2y=0$.

Lösn. till uppg. 1780—1782

1780) *Sök enveloppen för styrlinjen till en parabel, som går genom en given punkt och tangerar en given linje i en given punkt.* *X.*

Matematiska uppgifter

I. Parabeln tangerar den givna linjen $y=0$ i origo O och går genom $P(a;\ b)$. Projektionen av OP:s mittpunkt M på x-axeln är N. Tangenten i P skär x-axeln i Q. Den med OP parallella tangenten i T på QM halverar PQ och OQ i resp. A och B. *Höjderna i triangeln ABQ råkas enl. en känd sats på styrlinjen i S.* Om vinkelkoefficienten för MQ är $-1:k$, blir $NQ=bk:2$, $x_Q=\frac{1}{2}(bk+a)$, $x_A=x_S=\frac{1}{4}(bk+3a)$ och $y_S=\frac{a}{b}(x_Q-x_A)=\frac{1}{4}(ak-\frac{a^2}{b})$. Styrlinjens ekvation blir $y+\frac{1}{4}a^2:b-\frac{1}{4}\cdot ak=k(x-\frac{1}{4}\cdot bk-\frac{3}{4}a)$ eller $y+\frac{1}{4}a^2:b=k(x-\frac{1}{2}a)-\frac{1}{4}bk^2$. Om parabelns ekv. är $x^2=4ay$, blir tangentens ekv. $y=kx-ak^2$. Härav sluter man, att styrlinjen ständigt tangerar parabeln $(x-\frac{1}{2}a)^2=b(y+\frac{1}{4}a^2:b)$ eller $x(x-a)=by$, som alltså är den sökta enveloppen. *S.B.*

II. Om styrlinjerna till två parabler råkas i H, ser man därifrån (och detta är ett specialfall av en allmän sats för »skaror» av kägelsnitt) under räta vinklar diagonalerna i den fullständiga fyrsiding, som bildas av ∞-linjen och parablernas övriga gemensamma tangenter. Låt nu Π och Π_1 vara två parabler genom $P(a;\ b)$, som tangera x-axeln i $O(0;\ 0)$. Tangenten t till Π i P skär x-axeln i Q. När Π_1 obegränsat närmar sig Π, tenderar H mot H^* (»gränspunkten»), som är *skärningspunkt mellan ordinatan genom Q och normalen mot t genom O.* Detta därför att diagonalerna QX_∞ och Ot_∞ i gränsfyrsidingen $QOX_\infty t_\infty(Q)$ skola synas under räta vinklar från $H^*(x;\ y)$. Man får då direkt orten $y:x=(x-a):b$. Men orten för H^* är just den sökta enveloppen. H^* kan uppfattas som ortocentrum i den (oegentliga) triangel, som utgör limes för den av de ändliga gemensamma tangenterna till Π och Π_1 bildade (oegentliga) triangeln; t är gränsläget för den gemensamma tangent, som tenderar att gå genom P, när $\Pi_1\to\Pi$. *X.*

Även löst av *I. Gunsjö* och *N. J.*

1781) *En regelbunden dodekaeder och en regelbunden ikosaeder ha lika stora totala ytor. Beräkna förhållandet mellan ytorna av deras rätvinkliga projektioner, då strålarna i bägge fallen äro parallella med en huvuddiagonal.* *X.*

Vi tänka oss först en regelbunden dodekaeder inskriven i ett klot med radien 1. Planen genom centrum och kantlinjerna utskära på klotytan utanför varje kant storcirkelbågar (s radianer vardera), som indela klotytan i 12 regelbundna sfäriska 5-hörningar. Varje sådan har en inskriven cirkel med sfäriska radien r och en omskriven med radien R radianer. Genom att med storcirkelbågar ($<\pi$) förena ett hörn i en 5-hörning och en därifrån utgående

sidas mittpunkt med tillhörande cirklars gemensamma medelpunkt får man en rätvinklig sfärisk triangel med »hypotenusan» R och kateterna $\frac{1}{2}s$ och r. De mot dessa stående vinklarna äro 36° och 60°. Vi kunna vidare tänka oss parallella ljusstrålar vinkelräta mot en plan skärm, i vilkas väg de ogenomskinliga polyedrarna placeras. Förhållandet mellan skuggans yta och den sammanlagda arean av de 6 vid den förutsatta orienteringen belysta sidoytorna blir då enl. projektionssatsen för ytor $[\cos R+\cos(R+s)]:2$. Hos en ikosaeder har man p. s. s. klotytan indelad i 20 liksidiga sfäriska trianglar, var och en med sina s_1, r_1, R_1. I den rätvinkliga triangel, som har sidorna R_1, r_1, $\frac{1}{2}s_1$, återfinnas vinklarna 36° och 60°, men de stå nu emot r_1 och $\frac{1}{2}s_1$ resp. Till följd härav gäller $R=R_1$, $r=\frac{1}{2}s_1$, $\frac{1}{2}s=r_1$. Förhållandet mellan ikosaederns skugga och summan av de 10 belysta sidoytornas area blir $[\cos R_1+\cos(R_1+2r_1)]:2=$ $=[\cos R+\cos(R+s)]:2$. Skuggorna äro alltså lika stora, när kropparnas totalytor äro lika.

Anm.: Följande omformningar av $[\cos R+\cos(R+s)]:2$ må antecknas. En blick på en modell visar, att $\frac{1}{2}s+r+R=\frac{1}{2}\pi$. Förhållandet blir först $\cos(R+\frac{1}{2}s)\cos\frac{1}{2}s$, sedan $\sin r\cos\frac{1}{2}s$. Efter uträkning fås värdet $\cos 36°:\sqrt{3}\cos 18°$. *X.*

N. J. har lämnat följande lösning:

Tangentplanen i hörnen till den kring en regelbunden dodekaeder omskrivna sfären avgränsa en regelbunden ikosaeder, konjugerad med eller (polar)reciprok till dodekaedern. Huvuddiagonalerna i den ena kroppen äro normaler (från centrum) mot sidoytorna i den andra. De *spetsiga* vinklar (A och B), som kunna bildas av en linje av vartdera slaget hos dodekaedern, äro därför lika med motsvarande vinklar hos ikosaedern. I båda figurerna bilda de sidoytor, vilka stöta intill den huvuddiagonal som är vinkelrät mot projektionsplanet, samma vinkel A med detta, och de övriga sidoytorna bilda alla vinkeln B med projektionsplanet. Till projektionen av polyedern, enkelt räknad, bidraga lika många sidoytor av vartdera slaget, tillsammans hälften av hela antalet. Om båda kropparnas totalyta är T, äro alltså båda projektionernas areor $\frac{1}{2}T(\cos A+\cos B)$, och förhållandet mellan dem är 1.

Anm. Kuben och den regelbundna oktaedern äro reciproka, varför samma sats gäller även för dem.

1782) *Beräkna exakta värdet av ytan till en triangel, vars hörn dela enhetscirkelns omkrets i förhållandet 1 : 3 : 9.* *N. J.*

Triangelns hörn A, B, C kunna antagas vara de mot 1, ε, ε^4 svarande punkterna på enhetscirkeln i det komplexa talplanet, då

$\varepsilon = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha = 2\pi : 13$. Enligt formeln $4T = abc$ får man $x = 16T^2 = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^{12})(1-\varepsilon^4)(1-\varepsilon^9)(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^{10})$, eftersom ε^r och $\varepsilon^{-r} = \varepsilon^{13-r}$ äro konjugerade tal. Samtidigt betrakta vi triangeln $A_1(1)$, $B_1(\varepsilon^2)$, $C_1(\varepsilon^8)$ och få för denna $x_1 = 16T_1^2 = (1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^{11})(1-\varepsilon^8)(1-\varepsilon^5)(1-\varepsilon^6)(1-\varepsilon^7)$ genom att överallt ersätta ε med ε^2. Det framgår omedelbart, att $xx_1 = \prod_1^{12}(1-\varepsilon^r) = 13$, emedan ekv. $z^{12}+z^{11}+\ldots+z+1=0$ har rötterna ε^r, $r=1, 2, \ldots, 12$, så att dess vänstra led enligt faktorteoremet är identiskt med produkten $\Pi(z-\varepsilon^r)$. Man behöver endast insätta 1 i stället för z, så fås det önskade. Om man sedan utför produkten x och däri ersätter ε med ε^2, finner man ytterligare ett samband mellan x och x_1 nämligen $x+x_1=13$. Härav fås, då $x<x_1$, $x = \frac{1}{2}(13-\sqrt{117})$ och $T = \sqrt{(13-\sqrt{117}):32}$. X.

Även löst av *I. Gunsjö*.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1952

Matematiska uppgifter för latinlinjen[1]

1. I en triangel äro två sidor 9 cm och 15 cm och mellanliggande vinkel 120°. Hur stor är radien i den kring triangeln omskrivna cirkeln?
2. Summan av de 8 första termerna i en geometrisk serie är 485 och summan av de 4 första termerna 80. Vilken är seriens kvot?
3. Sidan AB i triangeln ABC är 9 cm och sidan AC 8 cm. Höjden från B är 6 cm. Beräkna sidan BC och triangelns vinklar i det fall, då vinkeln A är trubbig.
4. I en rätvinklig triangel är den inskrivna cirkelns radie 2 cm och hypotenusan 13 cm. Beräkna triangelns minsta vinkel.
5. Kurvan $y = a+3x-x^2$, där a är en konstant, skär x-axeln i punkterna A och B och har sin topp i punkten C. Bestäm värdet på a, när avståndet AB är 5 längdenheter. Upprita därefter kurvan och beräkna ytan av triangeln ABC.
6. På sidan AB $(=a)$ i den liksidiga triangeln ABC väljes en punkt P, och i denna drages normalen till AB. Normalen skär sidan

[1] Uppg. i matematik för nyspråkligt lyceum utgjordes av latinlinjens nr 1, 2, 5—8 och reallinjens (allm. kurs) nr 3 samt en variant av latinlinjens nr 4.

AC i punkten Q, och i denna drages normalen till AC. Denna normal skär sidan BC i punkten R, vilken sammanbindes med punkten P. Om P är lämpligt vald, blir PR vinkelrät mot BC. Ange för detta fall längden av AP och förhållandet mellan ytorna av trianglarna PQR och ABC.

7. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Diagonalerna AC och BD skära varandra i punkten E, så att vinkeln AEB är 60°. Vidare är AE 8 cm, CE 3 cm och BD 10 cm. Beräkna radien i cirkeln.
8. I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. Sidan AB är 5 cm och sidan AC 4 cm. Beräkna triangelns vinklar.

Resultat: **1.** $7\sqrt{3}=12{,}12$ cm. **2.** $\pm 1{,}5$. **3.** $A=138{,}18°$, $B=19{,}62°$, $C=22{,}20°$; $BC=15{,}9$ cm. **4.** $22{,}62°$. **5.** $a=4$; ytan $=15\frac{5}{8}$ ytenh. **6.** $AP=\frac{1}{3}a$; förh. $=\frac{1}{3}$. **7.** $\sqrt{37}=6{,}083$ cm eller $\frac{1}{3}\sqrt{273}=5{,}508$ cm. **8.** $A=82{,}82°$, $B=41{,}41°$, $C=55{,}77°$. — Utdrages BA över A till D, så att $AD=AC$. blir $\triangle CAD \sim \triangle BCD$, varav $CD=6$ cm, osv.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs

1. Summan av en konvergent oändlig geometrisk serie är lika med kvadraten på seriens första term. Skillnaden mellan summan av termerna med udda ordningsnummer och summan av termerna med jämna ordningsnummer är lika med en tredjedel av kuben på första termen. Bestäm serien.
2. I en regelbunden fyrsidig pyramid är en sidoyta lika stor som basytan. Beräkna den kring pyramiden omskrivna sfärens radie, uttryckt i pyramidens baskant a.
3. Hörnet A i triangeln ABC ligger i punkten $(-4; -4)$ och hörnet B i punkten $(8; 2)$. Höjden mot sidan AB skär medianen mot sidan BC i origo. Bestäm ekvationerna för triangelns sidor.
4. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Diagonalerna AC och BD skära varandra i punkten E, så att vinkeln AEB är 60°. Vidare är AE 8 cm, CE 3 cm, BD 10 cm och BE större än DE. Beräkna radien i cirkeln.
5. En backe, som kan antas vara plan och vars längdriktning tänkes gå vinkelrätt mot skärningslinjen mellan backens plan och horisontalplanet, bildar 10° vinkel med sistnämnda plan. En person färdas uppför backen i en riktning, som bildar 50° vinkel med backens längdriktning. Hur stor vinkel bildar färdriktningen med horisontalplanet?

6. Konstruera kurvan A med ekvationen $y=3x^2-x^3$ i dess huvuddrag. Undersök och åskådliggör i samma koordinatsystem den funktion B, som anger, hur vinkelkoefficienten för tangenten i en punkt på kurvan A beror av tangeringspunktens x-koordinat. Använd slutligen funktionen B och dess grafiska bild för att utreda, vilka riktningsvinklar tangenten till kurvan A kan ha, när tangeringspunkten genomlöper kurvan.

7. I funktionen $f(x)=\dfrac{2\sin 2x+\operatorname{tg} 2x}{2\sin x-\operatorname{tg} x}$ antar såväl täljaren som nämnaren värdet 0 för $x=60°$. Genom att på lämpligt sätt förenkla funktionen kan man bestämma $\lim\limits_{x\to 60°} f(x)$. Genomför detta. Bestäm därefter samtliga x-värden, för vilka $f(x)$ antar formen $\dfrac{0}{0}$, och ange motsvarande gränsvärden.

8. Kurvorna $4y=x^2-12x+32$ och $2y=16-x^2$ uppritas i sina huvuddrag. De båda räta linjerna $x=a$ och $x=a+2$, där a är en konstant, skära kurvorna i sammanlagt fyra punkter, vilka sammanbindas, så att ett parallelltrapets uppstår. Ytan av detta trapets kan uppfattas som en funktion av a, vilken funktions algebraiska uttryck blir olika i olika intervall för a. Bestäm dessa uttryck, samt undersök och åskådliggör grafiskt, hur ytan varierar, när a genomlöper alla reella värden.

Resultat: **1.** $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, osv. **2.** $17a\sqrt{15}:60$. **3.** AB: $x-2y=4$; BC: $x+5y=18$; AC: $4x-y=-12$. **4.** $\frac{1}{3}\sqrt{273}=5{,}508$ cm. **5.** $6{,}41°$. **6.** $B(x)=3x(2-x)$. När x går från $-\infty$ till 0, växer riktningsvinkeln α från 90° till 180°(=0°). När x växer från 0 till 1, växer α från 0° till 71,57° ($\operatorname{tg}\alpha=3$) för att därefter avta till 0°(=180°) för $x=2$. Med växande x går α sedan mot 90°. För α gäller alltså villkoren $0°\leqq\alpha\leqq 71{,}57°$ och $90°\leqq\alpha\leqq 180°$. **7.** Funktionen antar formen 0/0 för $x=n\cdot 360°$, då $\lim f(x)=6$, och för $x=60°+n\cdot 120°$, då $\lim f(x)=-2$. — Efter upplösning i faktorer får man $f(x)=\dfrac{\sin x\,(2\cos x-1)}{\sin x\,(2\cos x-1)}\cdot\dfrac{2\cos^2 x\,(2\cos x+1)}{2\cos^2 x-1}$.

8. Äro de parallella sidorna $f(a)$ och $f(a+2)$ och ytan $F(a)$, så gäller $f(a)=\pm\frac{3}{4}a(a-4)$, $f(a+2)=\pm\frac{3}{4}(a^2-4)$, $F(a)=f(a)+f(a+2)$. Om $F_1=1{,}5(a^2-2a-2)$ och $F_2=3-3a$, så är ytan resp. F_1, F_2, $-F_1$, $-F_2$, F_1 inom områdena: $-\infty<a\leqq -2$; $-2\leqq a\leqq 0$; $0\leqq a\leqq 2$; $2\leqq a\leqq 4$; $4\leqq a<\infty$. Ytans diagram, som är symmetriskt m. a. p. linjen $a=1$, utgöres av tre parabelbågar och två räta linjer; max. $=4{,}5$ för $a=1$ och minima (spetsar) $=3$ för $a=0$ och $a=2$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. I en ellips äro inskrivna dels den romb, som har hörnen i axlarnas ändpunkter, dels en godtycklig rektangel. Visa, att om man i rektangeln inskriver en ellips, vars axlar falla utefter den givna ellipsens, så tangerar denna ellips även rombens sidor.
2. Genom brännpunkterna till parablerna $y^2=4ax$ och $y^2=4bx$ dragas två parallella kordor, en i vardera parabeln. Dessa och tillhörande diametrar begränsa en parallellogram. Bestäm kordornas vinkelkoefficient, så att parallellogrammen blir en romb.
3. Brännpunktsradierna till en viss punkt på en hyperbel äro vinkelräta mot varandra, och tangenten i denna punkt bildar 60° vinkel med transversalaxeln. Sök hyperbelns excentricitet.
4. En rätvinklig triangel OAB har den räta vinkelns spets O i origo, hörnet A på den räta linjen $x=-3$ och hörnet B på den räta linjen $x-3y-3=0$. Sök och konstruera orten för triangelns tyngdpunkt, och ange ortens eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
5. Med en given sträcka AB som diameter är en halvcirkel uppritad. En cirkel med B till medelpunkt skär AB i D och halvcirkelbågen i C. En figur begränsas av kordan AC, sträckan AD och cirkelbågen CD. Bestäm medelst grafisk konstruktion vinkeln ABC på 0,5° när, då nämnda figur har största möjliga yta.
6. Vissa kurvor med ekvationen $xy=x^3+ax^2+bx+c$, där a, b och c äro konstanter, ha en minimipunkt och en inflexionspunkt, vilkas avstånd till kurvans asymptot äro lika stora. Ange det samband, som i detta fall råder mellan koefficienterna a och c, och visa, att de nämnda punkterna ha lika stora avstånd till x-axeln. Upprita slutligen den av ifrågavarande kurvor, vars minimipunkt ligger i punkten (1; 1).
7. Ange existensområden, nollställen och eventuella maxima och minima för funktionen
$$y=1-\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}.$$
Upprita därefter den motsvarande kurvan.

Resultat: **1.** Bevisas genom enkel analytisk räkning. Se även detta häfte sid. 118. **2.** $\pm\sqrt{2+\sqrt{8}}$. **3.** Om PF och PF_1 äro två brännpunktsradier ($PF>PF_1$), avsättes på PF stycket $PQ=PF_1$. Tillämpa vi sinusteoremet på triangeln FQF_1, fås $FF_1:FQ=2c:2a=e=\sin 45°:\sin 30°=\sqrt{2}$. — I det allm. fallet fås $e=\cos u:|\cos v|$, om

$\sphericalangle FPF_1 = 2u$ och tangentens riktningsvinkel $= v$. **4.** $3xy = x^2 + 9x + 9$. Max. i $(-3; 1)$, min. i $(3; 5)$, asymptoter äro $x = 0$ och $x - 3y + 9 = 0$. **5.** 66,8° **6.** Sambandet är $a^3 + c = 0$, kurvan: $xy = x^3 - x^2 + 1$. — Se detta häfte sid. 118. **7.** Existensområden: $-\frac{1}{3}\pi + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{1}{3}\pi + 2n\pi$ och $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$. Nollställen: $\frac{2}{3}n\pi$. Min. $= 0$ för $x = 2n\pi$ och min. $= 1 - \sqrt{3}$ för $x = \pi + 2n\pi$ samt gränsmax. $= 1$ i existensområdenas gränser.

Uppgifter i fysik

1. Vid ett sågverk släpas timmer upp till sågning längs ett lutande plan med hjälp av en elektrisk motor. Stållinan, med vilken timret uppfordras, är parallell med det lutande planet, vars lutningsvinkel är 30°. Timret buntas i knippen om 1,5 ton och släpas uppför planet med hastigheten 0,8 m/sek. Hur stor effekt (i kW) bör tillföras motorn, om dess verkningsgrad är 90 % och planets friktionskoefficient 0,15?
2. En flygmaskin (helikopter) rör sig i horisontell riktning med hastigheten 15 m/sek och befinner sig på 50 m höjd över horisontell mark. Ett litet föremål släppes från maskinen. Under vilken vinkel träffar föremålet marken? Luftmotståndet lämnas utan avseende.
3. En låda i form av en rätvinklig parallellepiped med kantlängderna 12, 36 och 48 cm står lutad mot den bakre vertikala väggen i en vagn. Vagnen går rakt framåt på en horisontell väg med den konstanta hastigheten 36 km/tim. Lådan stöder mot golvet längs en av de 36 cm långa kanterna, varvid denna är parallell med och belägen 24 cm från väggen. Lådans tyngdpunkt ligger i dess mitt. Beräkna den kortaste vägsträcka, på vilken vagnen kan bromsa in och stanna, utan att lådans jämvikt störes. Vagnens rörelse under inbromsningen får anses vara likformigt retarderad. Lådan förutsättes icke kunna glida utmed golvet.
4. Specifika värmet för ett pulver, som var lösligt i vatten men olösligt i olja, bestämdes på följande sätt. En väl värmeisolerad kalorimeter innehöll en viss mängd olja och försågs med termometer och omrörare. Kalorimetern och dess innehåll kunde uppvärmas elektriskt genom en i vätskan nedsänkt motståndsspiral på 11,5 ohm. Sedan ström under någon tid sänts genom spiralen, bröts strömmen. Efter omröring visade termometern 32,3° C. I kalorimetern nedfördes därefter hastigt 45,0 g pulver av rumstemperaturen 18,5° C. Sedan temperaturjämvikt inträtt, slöts ånyo strömmen, varvid strömstyrkan uppmättes till 0,778 A. Från och med det ögonblick strömmen slöts, avlästes under

ständig omröring temperaturen med vissa mellanrum. Följande värden erhöllos:

Tid i sek.	0	80	100	120	140
Temperatur	29,6°	31,6°	32,1°	32,6°	33,1°

Beräkna pulvrets specifika värme. 1 joule=0,239 cal.

5. För att bestämma brännvidden hos en samlingslins använde man vid ett tillfälle en spektrometer, injusterad på vanligt sätt. Kollimatorns och kikarens huvudaxlar ställdes i rät linje. Av den belysta spalten erhölls således en bild, som sammanföll med bilden av kikarens hårkors. Man placerade nu linsen med den obekanta brännvidden tätt intill kikarobjektivet. Kikarokularet måste därvid skjutas in 3,0 cm, för att spaltbilden skulle sammanfalla med bilden av hårkorset. Beräkna linsens brännvidd. Kikarobjektivets brännvidd var 24 cm. Linserna kunna betraktas som tunna. För nöjaktig problembehandling kräves, att en strålgång ritas, som är tydlig och fri från rent fysikaliska fel.
6. På en optisk bänk placeras en fotometer och på var sin sida om denna en ljuskälla. Avståndet mellan den ena av dessa (L_1) och fotometern är oförändrat under försöket. Då avståndet från den andra ljuskällan (L_2) till fotometern är 52 cm, är belysningen på denna lika från båda sidor. På samma sida som L_2 ställes en stor planspegel vinkelrätt mot optiska bänken, med den speglande ytan vänd mot fotometern och på 80 cm avstånd från denna. Sedan L_2 flyttats så, att dess avstånd till fotometern är 60 cm, blir belysningen åter lika från båda sidor. Hur många procent av det mot spegeln infallande ljuset reflekteras av denna? Ljuskällorna kunna vid beräkningen anses vara punktformiga.
7. En voltmeter, graderad från 0 till 10 volt och med motståndet 1000 ohm, skulle utan omkoppling inne i instrumentet göras användbar för mätning av strömstyrkor mellan 0 och 10 ampere. Beräkna storleken av det motstånd, som för ändamålet behöver anslutas till instrumentet.
8. Man ville noggrant mäta ett motstånd R. En ackumulator E_1, motståndet R och ett precisionsmotstånd R_0 på 100 ohm kopplades i serie till en sluten krets. En annan sluten krets bildades av en ackumulator E_2, en 100 cm lång, jämntjock mättråd och ett variabelt motstånd. De båda kretsarna förenades med varandra genom två ledningar. Den ena utgick från en av mättrådens ändpunkter (A) och den andra från en glidkontakt (B) på mättråden. Den förstnämnda ledningen innehöll en galvanometer.

Ledningarna anslötos först till motståndet R:s ändpunkter och därefter till R_0:s ändpunkter. I båda fallen inställdes glidkontakten B så, att galvanometern blev strömlös, varefter längden AB avlästes. I första fallet erhölls som medelvärde av flera inställningar 51,58 cm, i andra fallet 89,30 cm. Vilket värde på motståndet R kunde härav beräknas? Det variabla motståndet var före de egentliga mätningarna inställt så, att mättrådens längd skulle kunna väl utnyttjas, och ändrades sedan icke under mätningarnas gång. — För nöjaktig problembehandling kräves kopplingsschema med plus- och minuspoler samt strömriktningar i strömförande ledningar rätt markerade.

Resultat: **1.** 8,2 kW. **2.** 64,4°. **3.** 17,8 m. — I gränsläget är väggens tryckkraft=0; resultanten till tröghetskraften och tyngden skall vara riktad mot kantlinjen vid golvet. **4.** 0,289 cal pr g och grad. — På 108 sek. (interpolera!) höjes pulvrets temp. från 18,5° till 32,3°. **5.** 168 cm. **6.** 92,0 %. **7.** 1,00 ohm. **8.** 57,74 ohm.

Realexamen v. t. 1952

Provräkning

1. Lös ekvationen $\dfrac{5(x-0{,}1)}{6x+3}-\dfrac{3x-5}{12x-4}-\dfrac{3{,}5}{6}=0.$
2. En skola erhöll som gåva en summa av 50 000 kr. Av den årliga ränteinkomsten skulle 9/10 utdelas som stipendium. Det skänkta kapitalet placerades på följande sätt: 10 000 kr utlånades mot 4,5 % ränta; 40 st 3 % obligationer, var och en å nominellt 1000 kr, inköptes till 98 % kurs; återstoden insattes mot 2,5 % ränta i bank. Hur stort stipendium kunde utdelas efter ett år?
3. En bil körde halva avståndet mellan två städer på 1 tim 15 min med en jämn hastighet av 40 km/tim. Den andra hälften av vägen körde den likaledes med jämn hastighet, men farten var på denna sträcka endast 20 km/tim. Med hur många minuter skulle körtiden mellan de båda städerna ha minskats, om bilen hela vägen hållit en jämn hastighet av 30 km/tim?
4. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 16-\dfrac{12x-0{,}5y}{7}=\dfrac{\frac{1}{3}x+1}{0{,}5}, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y(y+1)-31. \end{cases}$
5. En affärsman, som år efter år beräknade 30 % pålägg, när han bestämde försäljningspriset på sina varor, uppskattade ett år sina kostnader för varornas lagring och försäljning till 20 % av

inköpspriset på de under året sålda varorna. Under det därpå följande året ökade han affärens omsättning med 10 % jämfört med föregående år. Då inga prisändringar ägt rum, kan detta anses innebära, att mängden av inköpta och sålda varor ökat med 10 %. Trots denna ökning av omsättningen uppgingo hans lagrings- och försäljningskostnader till samma belopp som under det föregående året. Med hur många procent ökades hans vinst?

6. I ett parallelltrapets äro sidorna AB, BC och CD vardera 30 cm och den fjärde sidan AD 60 cm. Diagonalerna AC och BD skära varandra i O. Beräkna ytan av triangeln BOC.
7. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Sidorna AB och DC råka utdragna varandra och bilda därvid en vinkel på $26° 42'$. Utdragas sidorna AD och BC, råkas även de och bilda en vinkel på $24° 18'$. Beräkna härav fyrhörningens vinklar.
8. Ett öppet kärl med lock har formen av en rät cirkulär kon med sidan 26 cm och basdiametern 20 cm. Kärlet hålles med spetsen nedåt, så att basytan blir horisontell, och i detsamma nedlägges ett klot. Man finner då, att man nätt och jämnt kan lägga på locket. Hur stor del av konens volym upptas av klotets?

Resultat: 1. $x=2$. 2. 1503 kr. 3. 25 min. 4. $x=6$, $y=4$. 5. Med ett inköpspris av 100 kr förtjänar han i första fallet 10 kr, i andra fallet 13 kr. Vinsten ökades alltså med 30 %. 6. $75\sqrt{3}=130{,}0$ cm². 7. $A=64° 30'$, $B=91° 12'$, $C=115° 30'$, $D=88° 48'$. 8. $\frac{40}{81}$.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen

Lösningarna till uppgifterna 1, 6—8 böra åtföljas av enkla figurer.

1. En pojke, som byggde ett modellflygplan, önskade bestämma tätheten hos det balsaträ, som han hade skaffat sig. Han ställde därför på en brevvåg en bägare med vatten. Vågen angav då en vikt av 380 g. Han stack därefter in ena ändan av en fin metallnål i en bit balsaträ, vars vikt bestämts till 15 g, och med den andra ändan höll han biten helt under vattenytan, utan att den berörde bägarens botten eller sidor och utan att något vatten rann ut ur bägaren. Denna gång visade vågen 468 g. Vilket värde på balsaträets täthet erhöll han härav?
2. Över två små lättrörliga trissor på samma höjd har man lagt en fin tråd, som i vardera ändan uppbär 100 g. Mellan trissorna, där tråden är horisontell, hänger man mitt på tråden en vikt på 100 g och låter den sjunka, tills jämvikt uppnåtts. Hur långt har därvid viktens upphängningspunkt sjunkit? Avståndet mellan trissorna är 10 dm.

3. En rälsbuss framdrives på en horisontell bana med hastigheten 36 km/tim. På grund av pågående rälsomläggning måste hastigheten under viss del av bansträckan nedbringas. Föraren slår därför ifrån motorn vid en viss tidpunkt men anbringar icke någon särskild bromskraft. Bussen förlorar därvid så småningom sin hastighet till följd av friktionsmotståndet. I förarhytten observeras, att hastigheten nedgått till hälften efter 1 min 40 sek. Hur lång sträcka har bussen tillryggalagt, sedan motorn slogs ifrån. Rörelsen förutsättes vara likformigt retarderad.
4. För att pumpa upp en cykelring använder en person en pump, vars inre diameter är 3 cm. Innerslangens volym är lika stor som volymen av en cylinder, vars diameter är 4 cm och höjd 220 cm (= innerslangens längd, mätt längs tvärsnittets centrum). Efter 55 pumpslag, vartdera av 25 cm längd, tycker han, att trycket är tillräckligt. Hur stort är då lufttrycket i innerslangen, om det från början var lika med den yttre luftens tryck (1 at)? Slangens volym och temperatur antagas vara oförändrade under pumpningen.
5. I en varmvattenberedare värmes vattnet med gas, som vid förbränning lämnar 5200 kcal per m^3 gas. Man räknar med att 60 % av denna värmemängd kommer vattnet i beredaren till godo. Vattentillförseln är avpassad så, att beredaren lämnar varmvatten av +60° C, om det till densamma kommande vattnet har temperaturen +10° C. Hur lång tid åtgår för att förse ett badkar med 400 l 60-gradigt vatten, om beredaren drar 0,4 m^3 gas i minuten?
6. Ett torrbatteri är slutet genom en ledning, som innehåller en amperemeter och en reostat. Då reostatmotståndet är 2 ohm, anger amperemetern strömstyrkan 1,89 A. Är däremot reostatmotståndet 8 ohm, blir strömstyrkan 0,54 A. Beräkna härav torrbatteriets inre motstånd. Amperemeterns motstånd är 0,05 ohm. Man kan bortse från kopplingstrådarnas motstånd.
7. En liten elektrisk ugn består av ett motstånd av kromnickeltråd, upplindad på en cylinder av lergods, som i sin tur omges av en värmeisolerande mantel. Ugnen inkopplas i serie med ett förkopplingsmotstånd på 90 ohm till belysningsnätet, som lämnar 220 V likström. Strömstyrkan i ledningen är 1,20 A. Hur mycket värme avger motståndet i ugnen per minut? 1 wattsek = 0,24 cal.
8. Två elektriska apparater, den ena stämplad 110 V, 200 W, den andra 110 V, 500 W, skola användas vid 220 V spänning. Om båda apparaterna seriekopplas och anslutas till 220 V, blir den

ena överbelastad. Genom att på lämpligt sätt inkoppla ett lagom avpassat motstånd kan man ge bägge apparaterna riktig spänning och effekt. Visa, hur detta skall ske och beräkna storleken av motståndet.

Resultat: **1.** 0,17 g/cm³. **2.** $\frac{1}{3}\sqrt{75}=2{,}89$ dm. **3.** 750 m. **4.** 4,52 at. **5.** 16 min. **6.** 0,35 ohm. **7.** 1,94 kcal/min. **8.** Parallellt med första apparaten skall inkopplas $40\frac{1}{3}$ ohm.

Beskrivande maskin- och byggnadslära

1. Man önskar bestämma en elmotors avgivna effekt och lägger för den skull en rem över motorns remskiva, vars diameter är 10 cm. Remmens ena ända fastsättes i en fjädervåg, som i sin tur är fastsatt vid golvet. I remmens fria ända hänger en vikt av 5 kg. Vid 1250 r/m visar fjädervågen en belastning av 28 kp. Hur stor är motorns avgivna effekt i hk?
2. I en 6 mm tjock plåt, vars hållfasthet mot skjuvning uppgår till 3200 kp/cm², skall stansas ett rektangulärt hål 20×25 mm. Beräkna tryckpåkänningen i stansen.
3. Ett fartyg har erhållit en läcka, varigenom vatten inströmmar i lastrummet. Två likadana pumpar, ställda bredvid varandra, var och en driven av en elmotor, som avger 20 hk, förmå hålla vattennivån konstant i fartyget. Därvid har var och en av pumparna en uppfordringshöjd=8 m. Pumparnas verkningsgrad= =75 %. Hur många ton vatten inströmmar i fartyget pr timme?
4. Vid slipning av en axel i rundslipmaskin tillföres slipmotorn en effekt av 5,3 kW. Effekten överföres med remutväxling till slipskivan, vars diameter är 230 mm och varvtal 2300 r/m. Hur stor blir periferikraften på slipskivan, om verkningsgraderna äro: för motorn 87 %, för remväxeln 94 % och för slipskivan jämte spindellagringen 96 %?
5. En skruvpress skall konstrueras för en presskraft av 20 Mp. Skruven, som utsättes för hela presskraften, utföres plattgängad med en kärndiameter, som är 80 % av ytterdiametern. Skruvens stigning väljes så, att gängprofilen blir kvadratisk. Tillåten tryckpåkänning i kärntvärsnittet är 400 kp/cm². Tillåtet yttryck mellan mutter och skruv är 120 kp/cm². Bestäm skruvens kärndiameter samt mutterns höjd.
6. En ihålig axel har 60 mm ytterdiameter och 5 mm godstjocklek. Man vill byta ut den mot en klenare men av samma material gjord axel, som har 50 mm ytterdiameter men som tål samma vridmoment som den grövre. Hur stor skall man taga godstjockleken på den klenare axeln?

7. En I-balk, normalprofil 20, skall infästas horisontellt i ena änden och belastas med 500 kg i den fria änden. Därjämte skall balken uppbära en last av 250 kg per löpmeter utefter hela balkens längd. Hur lång får balken högst göras, om den tillåtna böjpåkänningen är 1250 kp/cm²? Vid beräkningarna bortses från balkens egenvikt.
8. Vissa av kolvångmaskinens maskindelar förekomma även på en 4-takts bensinmotor. Vilka äro dessa? Redogör för de övriga maskinelementen hos de båda maskintyperna.

Resultat: 1. 2 hk. 2. 3460 kp/cm². 3. 1013 ton/tim. 4. 15,3 kp. 5. 80 mm kärndiameter, 118 mm mutterhöjd. 6. 11 mm. 7. 3,04 m.

Insänd litteratur

J. O. WISDOM, *Foundations of Inference in Natural Science.* Methuen, London 1952, Pp. 242, 22s. 6d. net.

The Teaching of Trigonometry in Schools, London 1950, Pp. 100, 6s. 6d. — *The Teaching of Calculus in Schools*, London 1951, Pp. 76, 4s. 6d. Reports prepared for the Mathematical Association. Bell & Sons Ltd, London.

A. DURAND, *Sur les cercles bitangents a la parabole.* Librairie Vuibert, Paris 1952, 32 p.

HENRI GUÉRIN, *Traité de manipulation et d'analyse des gaz.* Masson & Cie, Paris 1952, 636 p., cartonné 5100 fr.

PAUL PASCAL, *Chimie générale.* Application de la théorie des ions systèmes dispersés. Masson & Cie, Paris 1952, 386 p., 2200 fr.

W. KLEMM, *Anorganische Chemie.* 7. Aufl. Sammlung Göschen Bd 37, Gruyter, Berlin 1952, 184 S., DM 2,40.

LINUS PAULING, *Allmän kemi.* Svensk bearbetning av lektor Gunnar Starck. Almqvist & Wiksells Akad. Handböcker. Hugo Geber, Stockholm 1952, 599 s., inb. kr. 60:—.

ERNST SEDSTRÖM, *Studieplan i fysik.* Almqvist & Wiksells Skolböcker. Hugo Geber, Stockholm 1952, 96 s.

ARNE BROMAN, *Berömda matematiska problem.* Bonniers förlag, Stockholm 1952, 64 s., kr. 4:50.

JOHN WENNERBERG, *Teknikens språkvårdsfrågor.* Svenska Bokförl., Stockholm 1952, 30 s.

ERIK INGELSTAM och STIG SJÖBERG, »*ELFYMA*»*-tabellen.* Tabeller, formler, nomogram inom områdena: matematik, fysik, elektroteknik. Sjöbergs förlag, Stockholm 1952, 100 s. + utviksblad, kr. 8:25.

Ny kunskap, Översikt över vetenskapens senaste forskningsresultat. Red. av undervisningsrådet C. E. Sjöstedt. Natur & Kultur, Stockholm 1952, inb. kr. 31:—.

Kosmos, Fysiska uppsatser, utg. av Svenska Fysikersamfundet. Bd 29, 1951. Stockholm 1951, kr. 12:—.

Tekniska Nomenklaturcentralen. TNC 20. Korta uppsatser i aktuella frågor inom teknikens språkvård under 1951, 46 s., kr. 3:—. — TNC O—1952 (ersätter TNC O—1950). Vägledning i TNC:s publikationer, 24 s., kr. 1:—. Seelig & Co, Stockholm 1952.

Tidskrifter

Tellus, Svenska Geofysiska Föreningen, Stockholm 1951: 4.

Ur innehållet: Vilhelm Bjerknes in Memoriam; Age Determination of Pacific Chalk Ooze by Radiocarbon and Titanium Content; Multiple Currents in the Gulf Stream System; Height Variation in the Concentration of Ions; Das Feldkomponentenmühle; The Structure of Mean Circulations; General Circulation and the Stability of Zonal Flow; Der Mechanismus des meteorologischen Lärmes.

Populär astronomisk tidskrift, Stockholm 1952: 1—2.

Ur innehållet: Tycho Brahe-observatorierna på Ven; Det nya fotoelektriska instrumentet på Kvistabergs observatorium; De extragalaktiska stjärnsystemens rödförskjutningar och avstånd; Om s. k. stjärnassociationer; Titus-Bodes lag, minnesregel eller naturlag; Solens energiförsörjning; Notiser.

Populär radio, Stockholm 1951: 12, 1952: 1—5.

Ur innehållet: Termonegativa termistorn; Termistorns användningsområden; 250 W ultraljudsändare; Televisionsmottagare (beräkning, konstruktion); Tysk televisionsteknik; Synpunkter på konstruktion av amatörsändare; Svenska matematikmaskiner; Nätaggregat för batteriapparater; Kristallfilter i superheterodynmottagare; En enkel tongenerator; Halvedardioder.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1952: 1.

Ur innehållet: Heinrich Louis d'Arrest; Observationer af måneokkultationer; Stellarstatistik; Programmet for 20-tommers astrografen; Tycho Brahes instrumenter.

Fysisk Tidsskrift, København 1951: 5—6.

Ur innehållet: *MKSA*-systemet eller Giorgis enhedssystem; Bølgeledere og hulrumsresonatorer; Danske eksamensopgaver: Studentereksamen, Forprøven til skoleembedseksamen, Del af civilingeniøreksamen.

Naturen, Bergen 1951: 13—15, 1952: 1—4.

Ur innehållet: Menneskets blodtyper; Blodtypene som historiske indikatorer; En naturforsker på Festival of Britain; Ultraakustikk; Vilhelm Bjerknes; Blindernutstillingen 1951; Natthimmellyset; W. C. Brøgger 1851—1952, en minnesutstilling; Det sveitsiske institut for sne- og lavineforskning; Om skydekkets invirkning på demringstiden i Norge.

Discovery, London 1952: Febr., March, April, May.

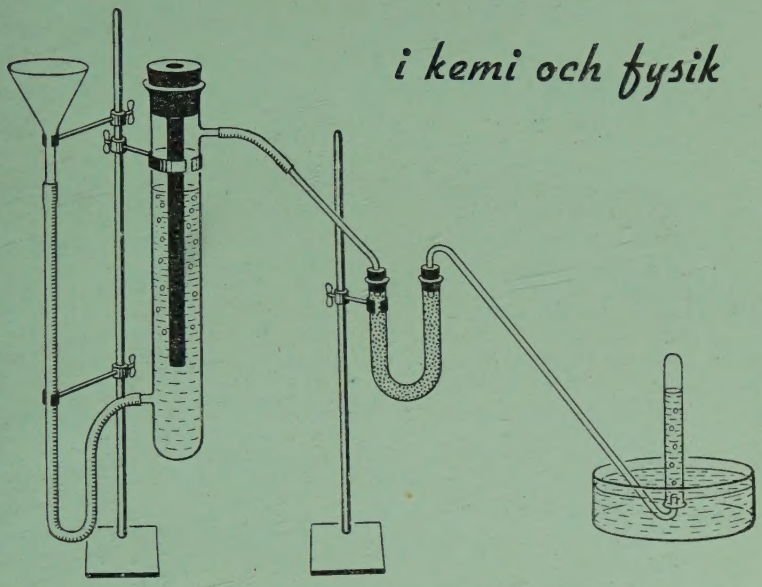
Ur innehållet: The Nature of Quicksands; The Worlds most valuable Birds; A Germ-free Laboratory; The Gas Turbine in Industry; Phosphorus and Life; The Plastic Aeroplane; A Working Atmospheric Engine; The Chemical Revolution; The Palace of Discovery; Energy in the Future; Control of the Weather; The Coming of Heredity; Samuel Pepys; Eclipse 1952. Ett stort antal notiser under rubriken »The Progress of Science». Bokanmälningar.

Science Progress, London 1952: April.

Ur innehållet: Fundamental Particles; Some Aspects of the Biology of Timber Insects; Experiments with Sound Vibrations; The Terrestrial Atmosphere. Recent Advances in Science: Astronomy, Physics, General and Physical Chemistry, Biochemistry, Geology, Pedology, Entomology. Bokanmälningar.

MODERNA BÖCKER

i kemi och fysik



Almkvist-Knave

LABORATIONER

Förberedande mätningsövningar. Klass 2^5 och 1^4 samt enhetsskolan 1:80

Inghe-Ekman

LÄROBOK I KEMI för realskolan

I. Oorganisk kemi 2:05 II. Organisk kemi och tillämpad kemi 2:50

LABORATIONSÖVNINGAR I KEMI för realskolan

II. Organisk kemi jämte några fristående övningar 1:10

Moll-Starck

LÄROBOK I KEMI för realgymnasiet 9:70

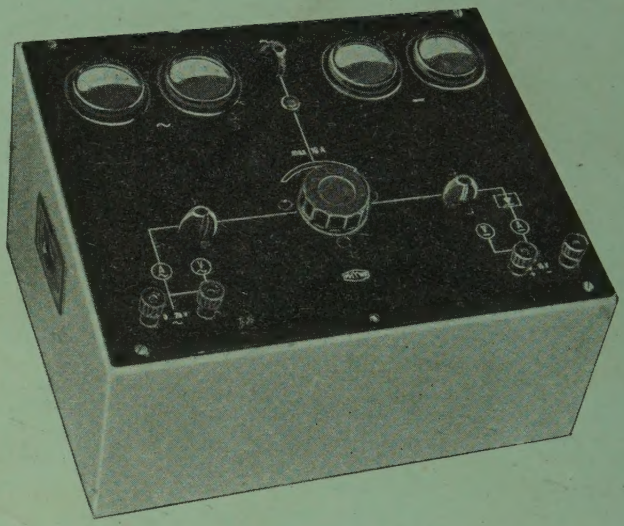
LÄROBOK I KEMI för realskolan

I. Första årskursen 1:15 II. Andra årskursen 1:—

SVENSKA BOKFÖRLAGET

Drottninggatan 20. Stockholm C. Postgiro 3994

PHYWE



Transportabel likriktare och kopplingstavla för 0—15 volt likström, max. belastn. 10 A samt 0—20 volt växelström, max. belastn. 10 A

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm

Lund 1952, Håkan Ohlssons boktryckeri.